

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE – filiala SĂLAJ

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – 14 februarie 2015

Barem Clasa a V-a

Notă: Orice altă rezolvare corectă se notează cu punctajul maxim corespunzător problemei.

PROBLEMA 1

Fie numărul $A = 403 \cdot 5^{2015} - 2015$

- Arătați că numărul A se divide cu 2015 ;
- Aflați câtul și restul împărțirii lui $A + 2016$ prin 2015 .

(Autor prof. Gornoavă Valeriu – Liceul cu Program Sportiv “Avram Iancu” Zalău)

Soluție

- $A = 403 \cdot 5^{2015} - 2015 \Leftrightarrow A = 403 \cdot 5 \cdot 5^{2014} - 2015 \Leftrightarrow \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$
 $\Leftrightarrow A = 2015 \cdot (5^{2014} - 1) \Leftrightarrow A : 2015 \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$
- $A + 2016 = 2015 \cdot 5^{2014} - 2015 + 2016 \Leftrightarrow A + 2016 = 2015 \cdot 5^{2014} + 1 \Leftrightarrow \dots\dots 2 \text{ puncte}$
 $\Rightarrow C = 5^{2014}, R = 1 \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$

PROBLEMA 2

Se dau numerele $a = 2^{100} : \left[(7^{13} : 7^{12} - 5)^{97} + 2^{104} : (2^4 \cdot 8) + 4^{49} \right] \cdot 2^{108}$ și $b = 3^{73} - (3^2 + 3^2 + 3^2)^{24}$.

- Calculați a și b .
- Comparați a și b .

(propusă din partea Școlii Gimnaziale “Gyulaffy Laszlo” Cehu Silvaniei)

Soluție

- a) Determinarea valorii $a = 2^{109}$ 2 puncte
Determinarea valorii $b = 2 \cdot 3^{72}$ 2 puncte
- b) $a = 2^{109} = 2 \cdot (2^3)^{36} = 2 \cdot 8^{36}$ 1 punct
 $b = 2 \cdot 3^{72} = 2 \cdot (3^2)^{36} = 2 \cdot 9^{36}$ 1 punct
- Finalizare $a < b$ 1 punct

PROBLEMA 3

Doi colegi citesc două cărți având același număr de pagini. În prima zi unul citește a cincea parte din cartea sa, iar celălalt a șaptea parte, constatând ca a citit cu 16 pagini mai puțin decât primul. Câte pagini mai au de citit fiecare?

(propusă din partea Liceul Tehnologic "Liviu Rebreanu" Hida)

Soluție

- Notăm a 5-a parte dintr-o carte cu x și a 7-a parte cu y 1 punct
Deci $x = 16 + y$ 1 punct
 $5 \cdot x = 7 \cdot y$ 1 punct
Ne rezultă $5 \cdot (16 + y) = 7 \cdot y$, deci $80 + 5 \cdot y = 7 \cdot y$, rezultă $y = 40$ și $x = 56$..2 puncte
Cărțile au fiecare $56 \cdot 5 = 40 \cdot 7 = 280$ pagini1 punct
Elevii mai au de citit 224 respectiv 240 pagini1 punct

PROBLEMA 4

Numărul 65 are proprietatea că se poate reprezenta în cel puțin două feluri ca sumă de două pătrate perfecte $65 = 49 + 16 = 64 + 1$. Arătați că numărul 25^{2015} are aceeași proprietate.

(Gazeta Matematică)

Soluție

$25 = 9 + 16 = 3^2 + 4^2$ 1 punct

deci $25^{2015} = 25^{2014} \cdot 25 = (3^2 + 4^2) \cdot (25^{1007})^2 =$ 1 punct

$= (3 \cdot 25^{1007})^2 + (4 \cdot 25^{1007})^2$ 1 punct

$25^3 = 15625 = 5625 + 10000 = 75^2 + 100^2$ 2 puncte

deci $25^{2015} = 25^{2012} \cdot 25^3 = (75^2 + 100^2) \cdot (25^{1006})^2 =$ 1 punct

$= (75 \cdot 25^{1006})^2 + (100 \cdot 25^{1006})^2$ 1 punct