OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 28 februarie 2015

Clasa a XII-a

1. Fie funcţia $f : \mathbb{Z}_9 \longrightarrow \mathbb{Z}_9$, $f(x) = x^9$. Să se determine submulţimile nevide A ale mulţimii $\mathbb{Z}_9$ cu proprietatea $f(A) = A$.

Gazeta Matematică 9/2014

2. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel şi două elemente fixate $a, b \in A$ cu proprietăţile $(a+b)^2 = a^2+b^2$ şi $(a + b)^3 = a^3 + b^3$. Să se arate că $(a + b)^n = a^n + b^n$, pentru orice număr natural nenul n.

Marin Marin

3. Determinaţi primitiva $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a funcţiei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{\sin x \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{e^{2x} + \sin^2 x},$$

pentru care $F(0) = 0$.

Ioana Maşca

4. Să se calculeze

$$\int \frac{2x + 5}{(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) + a}dx,$$

unde $a \geq 1$.

Sorina Stoian

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.

Clasa a XII a

1. *Fie funcţia* $f : \mathbb{Z}_9 \longrightarrow \mathbb{Z}_9$, $f(x) = x^9$. *Să se determine submulţimile nevide* A *ale mulţimii* $\mathbb{Z}_9$ *cu proprietatea* $f(A) = A$.
Soluţie. Elementele inversabile ale inelului Z_9 formează mulţimea $U = \{\hat{1}, \hat{2}, \hat{4}, \hat{5}, \hat{7}, \hat{8}\}$.
$(U, \cdot)$ este grup abelian, deci $x^6 = \hat{1}$, $\forall\ x \in U$. Astfel, $f(x) = x^3$, $\forall x \in U$. Obţinem $f(\hat{1}) = f(\hat{4}) = f(\hat{7}) = \hat{1}$, $f(\hat{2}) = f(\hat{5}) = f(\hat{8}) = \hat{8}$ şi $f(\hat{0}) = f(\hat{3}) = f(\hat{6}) = \hat{0}$. **(3p)**
Se verifică proprietatea $f(A) = A \ \Leftrightarrow\ A \subset f(\mathbb{Z}_9) = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{8}\}$, deci submulţimile nevide cerute sunt: $\{\hat{0}\}$, $\{\hat{1}\}$, $\{\hat{8}\}$, $\{\hat{0}, \hat{1}\}$, $\{\hat{0}, \hat{8}\}$, $\{\hat{1}, \hat{8}\}$, $\{\hat{0}, \hat{1}, \hat{8}\}$. **(4p)**

2. *Fie* $(A, +, \cdot)$ *un inel şi două elemente fixate* $a, b \in A$ *cu proprietăţile* $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ *şi* $(a+b)^3 = a^3 + b^3$. *Să se arate că* $(a+b)^n = a^n + b^n$, *pentru orice număr natural nenul* n.
Soluţie.
Avem
$(a+b)^2 = a^2 + b^2 \implies ab = -ba$; **(1p)**
$a^3 + b^3 = (a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2+b^2) = a^3 + a^2b + ba^2 + b^3 \implies ab^2 = -ba^2$; **(1p)**
$ab^2 = abb = (-ba)b = -b(ab) = -b(-ba) = b^2a$; $a^2b = a(ab) = -a(ba) = -(ab)a = -(-ba)a = ba^2$. **(2p)**
Astfel, au loc relaţiile

$$\begin{array}{ll} (1) & ab = -ba \\ (2) & ab^2 = b^2a = -ba^2 = -a^2b \end{array}$$

Demonstrăm prin inducţie proprietatea

$$(3)\ a^n b = -b^n a,\ \forall\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Conform (1), proprietatea este verificată pentru $n = 1$.
Presupunem $a^n b = -b^n a$, pentru un număr natural nenul n. Atunci, utilizând (1) şi (2), obţinem

$$a^{n+1}b = a^n(ab) = a^n(-ba) = -(a^nb)a = -(-b^na)a = b^na^2 = b^{n-1}(ba^2) = -b^{n-1}(b^2a) = -b^{n+1}a.$$

Deci proprietatea (3) este dovedită. **(2p)**
Pe baza relaţiei (3), se deduce (prin inducţie) că $(a+b)^n = a^n + b^n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$. **(1p)**

3. *Determinaţi primitiva* $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *a funcţiei* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{\sin x \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{e^{2x} + \sin^2 x},$$

pentru care $F(0) = 0$.
Soluţie.

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{\sin^2 x - \sin x \cos x}{e^{2x} + \sin^2 x} dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{e^{2x} + \sin^2 x}{e^{2x} + \sin^2 x} dx - \frac{\sqrt{2}}{4} \int \frac{(e^{2x} + \sin^2 x)'}{e^{2x} + \sin^2 x} dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} x - \frac{\sqrt{2}}{4} \ln(e^{2x} + \sin^2 x) + \mathcal{C},\ x \in \mathbb{R}. \qquad \textbf{(6p)} \end{aligned}$$

$F(0) = 0$ pentru $\mathcal{C} = 0$, deci primitiva cerută este $F(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{4}\ln(e^{2x} + \sin^2 x)$, $x \in \mathbb{R}$. **(1p)**

4. *Să se calculeze*

$$\int \frac{2x+5}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) + a} dx,$$

unde $a \geq 1$.
Soluţie.
Cazul 1. Pentru $a = 1$, avem

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) + 1 = (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) + 1 = (x^2 + 5x + 5)^2 \qquad \textbf{(2p)}$$

şi

$$\int \frac{2x+5}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+a}dx = \int \frac{(x^2+5x+5)'}{(x^2+5x+5)^2}dx = -\frac{1}{x^2+5x+5} + \mathcal{C},\ x \in I,$$

unde $I \subset \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-5-\sqrt{5}}{2}, \frac{-5+\sqrt{5}}{2} \right\}$ este un interval. **(2p)**

Cazul 2. Pentru $a > 1$, avem

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+5}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+a}dx &= \int \frac{(x^2+5x+5)'}{(x^2+5x+5)^2+a-1}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{a-1}}\text{arctg}\frac{x^2+5x+5}{\sqrt{a-1}} + \mathcal{C},\ x \in \mathbb{R}. \qquad \textbf{(3p)} \end{aligned}$$