Al doilea test de selecţie pentru OBMJ
Bucureşti, 25 aprilie 2018

Problema 1. Determinaţi toate triplete (a, b, c) de numere reale pentru care au loc simultan relaţiile:

$$a(b^2 + c) = c(c + ab),$$
$$b(c^2 + a) = a(a + bc),$$
$$c(a^2 + b) = b(b + ca).$$

Olimpiadă Cehia şi Slovacia

Soluţie: Fie (a, b, c) o soluţie a sistemului. Dacă unul dintre numerele a, b, c este egal cu 0, de exemplu dacă $c = 0$, atunci din $c(a^2 + b) = a(b + ca)$ rezultă $a = 0$, apoi, similar, că $b = 0$. Aşadar, dacă $abc = 0$, atunci $a = b = c = 0$. Căutăm în continuare soluţii cu $abc \neq 0$. Relaţiile din enunţ se pot rescrie echivalent

$$ab(b - c) = c(c - a)$$
$$bc(c - a) = a(a - b)$$
$$ca(a - b) = b(b - c).$$

Astfel, $a^2b^2c^2(a - b)(b - c)(c - a) = abc(a - b)(b - c)(c - a)$.

Cazul 1: Printre numerele a, b, c există (cel puţin) două egale; fie acestea a şi b. Avem

$$a^2c + bc = b^2 + abc \Leftrightarrow bc = b^2 \Leftrightarrow c = b,$$

deci în acest caz rezultă $a = b = c$. Reciproc, orice triplet cu componentele egale satisface relaţiile date.
Cazul 2: Dacă $a \neq b \neq c \neq a$, atunci $abc = 1$. Rezultă că $ab(b-c) = c(c-a) \Leftrightarrow (b-c) = c^2(c-a)$ şi încă două relaţii similare. Rezultă că

$$a^3 + b^3 + c^3 = ac^2 + ba^2 + cb^2.$$

Dacă $a, b, c > 0$, atunci din inegalitatea mediilor avem $a^3 + a^3 + b^3 \geq 3ba^2$ (cu egalitate dacă $a = b$) care, adunată cu analoagele, conduce la $a^3 + b^3 + c^3 \geq ac^2 + ba^2 + cb^2$. Avem aşadar egalitate în inegalitatea precedentă, deci $a = b = c$.
Dacă una din variabile este pozitivă, iar celelalte două negative, de exemplu $a > 0$, $b, c < 0$, atunci

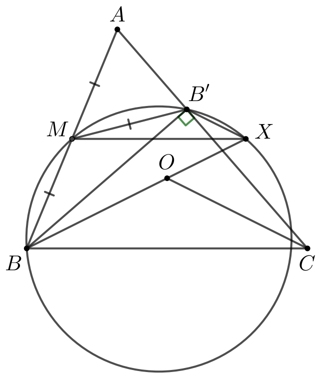
$$b(c^2 + a) = a(a + bc) = a^2 + 1 > 0 \Rightarrow a < 0,$$

contradicţie.
În concluzie, singurele soluţii sunt $(a, b, c) = (x, x, x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

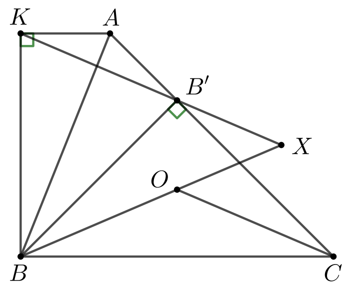
Problema 2. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic în care $AB < BC$, O centrul cercului său circumscris şi B' piciorul înălţimii din B. Paralela prin B' la CO intersectează dreapta BO în punctul X. Arătaţi că X şi mijloacele segmentelor $[AB]$ şi $[AC]$ sunt coliniare.

Caucasus Mathematical Olympiad

Soluţia 1: Fie M mijlocul laturii $[AB]$. Atunci $m(\angle OBC) = m(\angle OCB) = 90° - m(\angle A)$ şi $MX \parallel BC$ revine la $m(\angle MXB) = 90° - m(\angle A)$. Dar $m(\angle B'XB) = m(\angle XOC) = 2m(\angle OBC) = 180° - 2m(\angle A)$. În triunghiul ABB' avem $MA = MB = MB'$ şi $m(\angle BMB') = m(\angle MAB') + m(\angle MB'A) = 2m(\angle A)$. Rezultă că patrulaterul $MBXB'$ este inscriptibil, deci $m(\angle MXB) = m(\angle MB'B) = m(\angle ABB') = m(\angle OBC)$, de unde concluzia.



Soluţia 2: Fie K proiecţia lui B pe paralela dusă prin A la BC. Atunci patrulaterul $AKBB'$ este inscriptibil, deci $m(\angle AB'K) = m(\angle ABK) = 90^\circ - m(\angle B) = m(\angle OCA) = m(\angle CB'X)$. Rezultă că punctele K, B' şi X sunt coliniare. În fine, vom arăta că triunghiul BXK este isoscel cu vârful în X, de unde va rezulta că X se găseşte pe mediatoarea segmentului $[BK]$, adică pe linia mijlocie a triunghiului ABC paralelă cu BC. Avem $m(\angle XBK) = 90^\circ - m(\angle OBC) = m(\angle A) = m(\angle XKB)$ (din patrulaterul inscriptibil $AKBB'$). Concluzia se impune.



Soluţia 3: (*Alexandru Mihalcu*)
Fie S mijlocul lui $[AC]$ şi $\{T\} = BX \cap AC$. Atunci $OS \parallel BB'$, deci $\dfrac{B'S}{ST} = \dfrac{OB}{OT} = \dfrac{OC}{OT} = \dfrac{B'X}{XT}$.
Din reciproca teoremei bisectoarei rezultă că $(XS$ este bisectoarea unghiului $\angle B'XT$. Atunci $m(\angle SXT) = \dfrac{1}{2} m(\angle B'XT) = \dfrac{1}{2} m(\angle XOC) = m(\angle OBC)$, de unde concluzia.

Problema 3. Fie $A = \left\{ a = q + \dfrac{1}{q} \mid q \in \mathbb{Q}^*,\ q > 0 \right\}$,

$$A + A = \{a + b \mid a, b \in A\}, \quad A \cdot A = \{a \cdot b \mid a, b \in A\}.$$

Arătaţi că:
i) $A + A \neq A \cdot A$;
ii) $(A + A) \cap \mathbb{N} = (A \cdot A) \cap \mathbb{N}$.

Vasile Pop

Soluţie:

i) Fie $a = 1 + \frac{1}{1} = 2 \in A,\ b = 2 + \frac{1}{2} \in A$. Avem

$$a + b = 2 + 2 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2} \in A + A$$

Arătăm că $\frac{9}{2} \notin A \cdot A$. Presupunem prin absurd că

$$\frac{9}{2} = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)\left(\frac{z}{t} + \frac{t}{z}\right) = \frac{(x^2+y^2)(z^2+t^2)}{xyzt}$$

cu $(x,y) = (z,t) = 1,\ x, y \in \mathbb{N}^*$.
Rezultă $3 \mid x^2 + y^2$ sau $3 \mid z^2 + t^2 \Rightarrow 3 \mid x$ sau $3 \mid y$ sau $3 \mid z$ şi $3 \mid t$

$$\Rightarrow (x,y) \neq 1 \text{ sau } (z,t) \neq 1 \text{ contradicţie}$$

ii) Arătăm că $A \cdot A \subset A + A$.

$$\left(q_1 + \frac{1}{q_1}\right)\left(q_1 + \frac{1}{q_2}\right) = \left(q_1q_2 + \frac{1}{q_1q_2}\right) + \left(\frac{q_1}{q_2} + \frac{q_2}{q_1}\right) \in A + A,$$

deci

$$(A \cdot A) \cap \mathbb{N} \subset (A + A) \cap \mathbb{N}.$$

Incluziunea inversă:

$$(A + A) \cap \mathbb{N} \subset (A \cdot A) \cap \mathbb{N}.$$

Fie

$$n = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{z}{t} + \frac{t}{z}\right) = \frac{(x^2+y^2)zt + (z^2+t^2)xy}{xyzt} \in \mathbb{N}$$

cu $x, y, z, t \in \mathbb{N},\ (x,y) = (z,t) = 1$. Avem:

$$(x^2 + y^2, xy) = 1 \text{ şi } (z^2 + t^2, zt) = 1,$$

deci rezultă

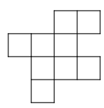
$$xy \mid zt \text{ şi } zt \mid zy \Rightarrow xy = zt.$$

Luăm $q_1 = \frac{z}{y},\ q_2 = \frac{x}{z}$ şi avem:

$$\left(q_1 + \frac{1}{q_1}\right)\left(q_2 + \frac{1}{q_2}\right) = \left(\frac{z}{y} + \frac{y}{z}\right)\left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{z^2}{xy} + \frac{xy}{z^2}$$

$$= \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{z^2}{zt} + \frac{zt}{z^2} = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{z}{t} + \frac{t}{z}\right) = n \in A + A.$$

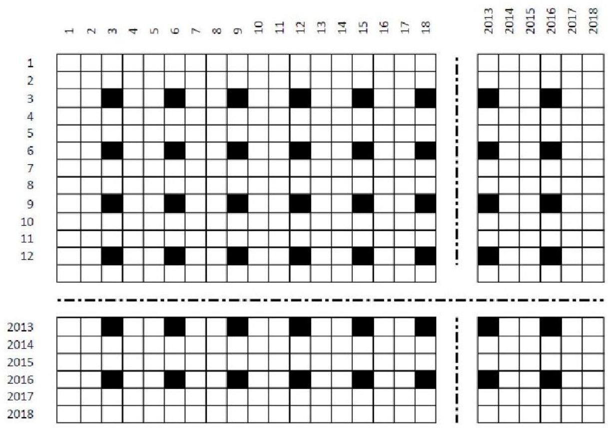
Problema 4. Fie o tablă 2018×2018. Numim dală LC o dală formată din 9 pătrăţele unitate congruentă cu cea din figura de mai jos



Care este numărul maxim de dale LC ce pot fi aşezate fără suprapuneri pe tablă? (Fiecare din cele 9 pătrăţele unitate ale dalei trebuie să se suprapună peste una din pătrăţelele unitate ale tablei; o dală poate fi rotită, simetrizată, etc.)

Alexandru Gîrban

Soluţie:
Numerotăm liniile şi coloanele de la 1 la 2018. Colorăm cu negru pătrăţelele unitate care au ambele coordonate divizibile cu 3.



Sunt 672^2 pătrăţele negre. Observăm că fiecare dală LC acoperă exact un pătrăţel negru, deci putem plasa pe tablă cel mult 672^2 dale. Pe de altă parte, exemplul de mai jos indică un mod de a aşeza pe tablă 672^2 dale. Aşadar maximul căutat este 672^2.