

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**

Etapă locală – Constanța, 23.02.2014

Clasa a X-a

**Subiectul I**Să se determine  $x, y, z \geq 0$  astfel încât:

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 3\sqrt{2} \\ 2^{x^2+y} + 2^{y^2+z} + 2^{z^2+x} = 192 \end{cases}$$

Cătălin Zîrnă

**Subiectul II**Fie  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}^*$  astfel încât:

$$|z_1| = |z_2| = \left| \frac{3z_3 - 2z_1}{2} \right| = \left| z_3 - \frac{z_2}{3} \right|$$

Arătați că :  $\operatorname{Re} \frac{z_3}{z_1} = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \frac{z_3}{z_2}$  unde  $\operatorname{Re}(a + bi) = a; a, b \in \mathbf{R}; i^2 = -1$ 

Dorin Arventiev

**Subiectul III**Determinați funcția  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  pentru care :

$$f(f(x+y)) = y + f(1-x), \quad \forall x, y \in \mathbf{R}$$

Gabriela Constantinescu

**Subiectul IV**Rezolvați, în mulțimea  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , ecuația:

$$4^{\sqrt{\sin x}} + 2^{\sqrt{\cos x}} = \log_2 \frac{8}{1+x^2}$$

Niculae Cavachi

Notă:

Timp de lucru: 3 ore

Toate subiectele sunt obligatorii

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7

Nu se acordă puncte din oficiu

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**

Etapa locală – Constanța, 23.02.2014

Clasa a X-a

**Barem de corectare și notare**
**Subiectul I**

 Să se determine  $x, y, z \geq 0$  astfel încât:

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 3\sqrt{2} \\ 2^{x^2+y} + 2^{y^2+z} + 2^{z^2+x} = 192 \end{cases}$$

Cătălin Zîrnă

**Soluție**  $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 3\sqrt{2} \Rightarrow x + y + z + 2(\sqrt{xy} + \sqrt{xz} + \sqrt{yz}) = 18 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 18 \leq x + y + z + (x + y) + (x + z) + (y + z) \Rightarrow x + y + z \geq 6 \dots\dots\dots 3p$

$$\sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}} \geq \frac{x + y + z}{3} \geq 2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq 12 \dots\dots\dots 1p$$

$$2^{x^2+y} + 2^{y^2+z} + 2^{z^2+x} \geq 3\sqrt[3]{2^{x^2+y^2+z^2+x+y+z}} \geq 3\sqrt[3]{2^{18}} = 3 \cdot 2^6 \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Avem egalitate} \Leftrightarrow \text{avem egalitate în medii} \Leftrightarrow x = y = z = 2 \dots\dots\dots 1p$$

**Subiectul II**

 Fie  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$  astfel încât:

$$|z_1| = |z_2| = \left| \frac{3z_3 - 2z_1}{2} \right| = \left| z_3 - \frac{z_2}{3} \right|$$

Arătați că :  $\operatorname{Re} \frac{z_3}{z_1} = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \frac{z_3}{z_2}$  unde  $\operatorname{Re}(a + bi) = a; a, b \in \mathbb{R}; i^2 = -1$

Dorin Arventiev

**Soluție** Putem presupune  $|z_1| = |z_2| = 1$  ( în caz contrar, împărțim relația la  $r = |z_1| \neq 0$  și renotăm  $\frac{z_1}{r} = z_1$ ,

cu  $|z_1| = 1$  etc.). Notăm  $\frac{3z_3 - 2z_1}{2} = u \Rightarrow z_3 = \frac{2u + 2z_1}{3} \dots\dots\dots 1p$

Rezultă  $|z_1| = |z_2| = |u| = \left| \frac{2}{3}u + \frac{2}{3}z_1 - \frac{1}{3}z_2 \right| = 1, uu = 1, \bar{u} = \frac{1}{u};$

$$\left( \frac{2}{3}u + \frac{2}{3}z_1 - \frac{1}{3}z_2 \right) \left( \frac{2}{3}\bar{u} + \frac{2}{3}\bar{z}_1 - \frac{1}{3}\bar{z}_2 \right) = 1 \Rightarrow \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9} \left( \frac{u}{z_1} + \frac{z_1}{u} \right) - \frac{2}{9} \left( \frac{u}{z_2} + \frac{z_2}{u} \right) - \frac{2}{9} \left( \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} \right) = 1 \dots 3p$$

$$\Rightarrow 2 \operatorname{Re} \frac{u}{z_1} = \operatorname{Re} \frac{u + z_1}{z_2} \left( \text{deoarece} \left( \frac{\bar{u}}{z_1} \right) = \frac{z_1}{u} \text{ și } \frac{u}{z_1} + \frac{z_1}{u} = 2 \operatorname{Re} \frac{u}{z_1} \text{ etc.} \right) \dots\dots\dots 2p$$

și, înlocuind pe u obținem:

$$2 \operatorname{Re} \frac{3z_3 - 2z_1}{2z_1} = \operatorname{Re} \frac{\frac{3z_3 - 2z_1}{2} + z_1}{z_2} \Rightarrow \left( 3 \operatorname{Re} \frac{z_3}{z_1} \right) - 2 = \operatorname{Re} \frac{3z_3}{2z_2} \text{ împărțim prin } 3 \Rightarrow$$

$$\operatorname{Re} \frac{z_3}{z_1} = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \frac{z_3}{z_2} \dots\dots\dots 1p$$

### Subiectul III

Determinați funcția  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  pentru care :

$$f(f(x+y)) = y + f(1-x), \forall x, y \in \mathbf{R}$$

Gabriela Constantinescu

#### Soluție

Pentru  $y = 0$  obținem  $f(f(x)) = f(1-x), \forall x \in \mathbf{R}$  .....1p

Vom arăta că  $f$  este injectivă.

Fie  $a, b \in \mathbf{R}$  a. î.  $f(a) = f(b) \Rightarrow f(f(a)) = f(f(b)) \Rightarrow f(1-a) = f(1-b)$  .....2p

Dar  $f(f(b+a)) = f(f(a+b)) \Rightarrow a + f(1-b) = b + f(1-a)$  .....2p

Atunci rezultă  $a = b$ , deci  $f$  este injectivă.....1p

Din  $f(f(x)) = f(1-x), \forall x \in \mathbf{R}$  și  $f$  este injectivă rezultă  $f(x) = 1-x, \forall x \in \mathbf{R}$  .....1p

### Subiectul IV

Rezolvați, în mulțimea  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , ecuația:  $4^{\sqrt{\sin x}} + 2^{\sqrt{\cos x}} = \log_2 \frac{8}{1+x^2}$

Niculae Cavachi

#### Soluție

$$4^{\sqrt{\sin x}} + 2^{\sqrt{\cos x}} \geq 4^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} = 4^{\sin^2 x} + \frac{2}{2^{\sin^2 x}} = 4^{\sin^2 x} + \frac{1}{2^{\sin^2 x}} + \frac{1}{2^{\sin^2 x}} \geq 3\sqrt[3]{4^{\sin^2 x} \cdot \frac{1}{2^{\sin^2 x}} \cdot \frac{1}{2^{\sin^2 x}}} = 3$$

(1). Avem egalitate doar pentru  $x = 0$ .....4p

$\log_2 \frac{8}{1+x^2} \leq \log_2 8 = 3$  cu egalitate pentru  $x = 0$  (2).....2p

Din (1) și (2) rezultă soluția unică  $x = 0$ .....1p