Barem de corectare OLM Clasa a IX-a, 2013

1. Din $\left(a+b+c\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9$, $\left(\forall\right)a,b,c>0$ obținem..**(2p)**

$\sum\frac{1}{\sqrt{x^2+yz+3}}\geq\frac{9}{\sqrt{x^2+yz+3}+\sqrt{y^2+zx+3}+\sqrt{z^2+xy+3}}$ ....**(1p)**

Este suficient să arătăm că: $\sqrt{x^2+yz+3}+\sqrt{y^2+zx+3}+\sqrt{z^2+xy+3}\leq 9$ ....**(1p)**

$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\leq\sqrt{3\left(a+b+c\right)}$, $\left(\forall\right)a,b,c\geq 0$ şi $xy+yz+zx\leq x^2+y^2+z^2\leq 9$, de unde……**(1p)**

$\sqrt{x^2+yz+3}+\sqrt{y^2+zx+3}+\sqrt{z^2+xy+3}\leq\sqrt{3\left(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx+9\right)}\leq 9$ ....**(2p)**

2. P(n): $5^{2n+1}\,2^{n+2}+3^{n+2}\,2^{2n+1}\,\vdots\,19$; P(0): $38\,\vdots\,19$, adevărat..**(2p)**

Pentru $n\geq 0$ presupunem P(n) adevărată, deci $5^{2n+1}\,2^{n+2}+3^{n+2}\,2^{2n+1}=19k,\ k\in N$ şi.............**(1p)**

$5^{2n+1}\,2^{n+2}=-3^{n+2}\,2^{2n+1}+19k,\ k\in N$ ....**(1p)**

$5^{2n+3}\,2^{n+3}+3^{n+3}\,2^{2n+3}=50\cdot 5^{2n+1}\,2^{n+2}+3^{n+3}\,2^{2n+3}=50\left(19k-3^{n+2}\cdot 2^{2n+1}\right)+3^{n+3}\cdot 2^{2n+3}=$

$=19\cdot 50k-50\cdot 3^{n+2}\cdot 2^{2n+1}+3^{n+3}\cdot 2^{2n+3}=19\cdot 50k-3^{n+2}\cdot 2^{2n+1}\left(50-12\right)\vdots\,19\Rightarrow$ P(n+1) adev.......**(2p)**

$\Rightarrow$ P(n) adevărată pentru orice n natural...**(1p)**

3. $x_p=x_{p+1}\Leftrightarrow a^{2p}+b^{2p}+c^{2p}=a^{2p+2}+b^{2p+2}+c^{2p+2}\Rightarrow\sum a^{2p}\left(a^2-1\right)=0$ ....**(2p)**

$x_{p+1}=x_{p+2}\Leftrightarrow\sum a^{2p+2}\left(a^2-1\right)=0$ ....**(2p)**

Scăzând relațiile se deduce că $\sum a^{2p}\left(a^2-1\right)^2=0$ ....**(2p)**

$\Rightarrow a,b,c\in\left\{-1,0,1\right\}$ de unde rezultă concluzia...**(1p)**

4. a) $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{PO}$ ....**(3p)**

b) Ducem prin *P* paralele la laturile triunghiului şi notăm cu *M, N, Q, R, S, T* intersecțiile acestora cu laturile *(AB), (BC),* respectiv *(CA).* Triunghiurile *PMN, PQR, PST* sunt echilaterale şi patrulaterele *PNBQ, PRCS, PTAM* sunt paralelograme..**(2p)**

$\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{PF}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PN}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PR}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PS}+\overrightarrow{PT}\right)=$ ....**(1p)**

$=\frac{1}{2}\left[\left(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PT}\right)+\left(\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{PQ}\right)+\left(\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{PS}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right)=\frac{3}{2}\overrightarrow{PO}$ ....**(1p)**

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN SIBIU

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ, 09.02.2013
Clasa a IX-a

1. (7p) Fie x, y, z trei numere reale cu proprietatea că $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$. Arătați că:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+yz+3}}+\frac{1}{\sqrt{y^2+zx+3}}+\frac{1}{\sqrt{z^2+xy+3}}\geq 1.$$

GMB2012

2. (7p) Demonstrați că numărul $5^{2n+1}\cdot 2^{n+2}+3^{n+2}\cdot 2^{2n+1}$ este divizibil cu 19, pentru orice număr natural *n*.

***

3. (7p) Pentru numerele reale a,b,c se consideră şirul $\left(x_n\right)_{n\geq 1}$ definit prin relația $x_n = a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}$, pentru orice *n* număr natural nenul. Demonstrați că, dacă există $p \in N^*$, astfel încât $x_p = x_{p+1} = x_{p+2}$, atunci $x_n = a^2+b^2+c^2$, pentru orice *n* număr natural nenul.

Alin Pop

4. Se consideră *P* un punct în interiorul triunghiului echilateral *ABC* cu centrul în *O*. Dacă *D, E, F* sunt proiecțiile lui *P* pe laturile (*AB*), (*BC*), respectiv (*AC*) ale triunghiului, arătați că:

(3p) a) $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=3\overrightarrow{PO}$.

(4p) b) $\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{PF}=\frac{3}{2}\overrightarrow{PO}$.

***

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp efectiv de lucru: 3 ore.