CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ ALICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”
ETAPA LOCALĂ – 09 FEBRUARIE 2024
CLASA A XII-A
Filiera tehnologică - toate profilurile și specializările

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ $G=\{A,A^2,I_3\}$și mulțimea $G=\{A^n,n\in N^*\}$.

a) **(3p)** Calculați A^{2024}.

b) **(4p)** Arătați că $(G,\cdot)$ este grup abelian.

Barem de corectare și notare

a) $A^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}, A^3=I_3\Rightarrow A^{2024}=A^2$ **3p**

......................**1p**

......................**3p**

b) $G=\{A,A^2,I_3\}$

Tabla legii și scrierea proprietăților grupului

2. Pe $\mathbb{R}$ definim legea de compoziție „ $*$ ” dată prin

$x*y=\sqrt[3]{x^3\cdot y^3-x^3-y^3+2}\quad(\forall)\,x.y\in\mathbb{R}$

a) **(2p)** Determinați suma cuburilor rădăcinilor ecuației

$$1*\frac{1}{2}*\frac{1}{4}*\cdots*\frac{1}{2^{2024}}=x^5-3x^3+2x+1$$

b) **(3p)** Să se demonstreze că funcția $f:(\mathbb{R},*)\to(\mathbb{R},.)$ dată prin

$f(x)=\sqrt[3]{x^3-1}$ realizează izomorfism de grupuri

c) **(2p)** Calculați $\sqrt[3]{2^3+1}*\sqrt[3]{3^3+1}*\cdots*\sqrt[3]{2024^3+1}$

Barem de corectare și notare

a) Legea dată se rescrie astfel $x*y=\sqrt[3]{(x^3-1)(y^3-1)+1}$ și obținem **1p**

$$1*\frac{1}{2}*\frac{1}{4}*\cdots*\frac{1}{2^{2024}}=1$$ **1p**

Ecuația devine $x^5-3x^3+2x=0$ cu soluțiile

$x\in\{0,-1,1,-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$ respectiv suma cuburilor rădăcinilor este 0

b)

$f(x*y)=\sqrt[3]{(x*y)^3-1}=\sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{(x^3-1)(y^3-1)+1}\right)^3-1}=$
$=\sqrt[3]{(x^3-1)(y^3-1)+1-1}=\sqrt[3]{(x^3-1)}\cdot\sqrt[3]{(y^3-1)}=f(x)\cdot f(y)$ **1p**
deci f realizează morfism de grupuri
Pentru demonstrarea injectivității presupunem $f(x_1)=f(x_2)$ de unde
$\sqrt[3]{(x_1^3-1)}=\sqrt[3]{(x_2^3-1)}$. După calcule obținem $x_1=x_2$ **1p**
Pentru demonstrarea surjectivității fie $f(x)=y$ de unde $x=\sqrt[3]{y^3+1}$ și ținem cont de faptul că x este real deci se obține y real, așadar imaginea funcției coincide cu codomeniul funcției **1p**

c) Din b) avem $f\left(\sqrt[3]{2^3+1}*\sqrt[3]{3^3+1}*\dots*\sqrt[3]{2024^3+1}\right)=$
$=f\left(\sqrt[3]{2^3+1}\right)\cdot f\left(\sqrt[3]{3^3+1}\right)\cdot\ldots\cdot f\left(\sqrt[3]{2024^3+1}\right)=2\cdot3\cdot\ldots\cdot2024=2024!$ **1p**
Pe baza bijectivității obținem $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x^3+1}$ de unde **1p**
$\sqrt[3]{2^3+1}*\sqrt[3]{3^3+1}*\dots*\sqrt[3]{2024^3+1}=f^{-1}(2024!)=\sqrt[3]{(2024!)^3+1}$

3. Pentru optimizarea analizorului de gaze care măsoară cantitatea x de emisii ale motorului autovehiculelor rutiere , s-a stabilit relația matematică dată de funcția $f:[0;+\infty)\to(0;+\infty)$ care admite o primitivă F cu proprietatea că

$e^x\cdot F(x)=f(x),\ (\forall)\ x\geq 0\ \text{și}\ f(0)=e.$

a) **(3p)** Arătați că $f(x)=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}$

b) **(4p)** Să se determine funcția f(x) pentru a putea calibra analizorul de gaze.

Barem de corectare și notare

a) Din ipoteză avem $e^x\cdot F(x)=f(x)$ de unde $F(x)=\frac{f(x)}{e^x}$ ...**1p**

Dar F este derivabilă, f este derivabilă deci prin derivarea relației de mai sus se obține $F'(x)=\left(\frac{f(x)}{e^x}\right)'$ de unde $f(x)=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}$ ...**2p**

b) Din punctul a) avem $\frac{f'(x)}{f(x)}=e^x+1$ ...**1p**
...**1p**
Prin integrare se obține $ln f(x)=e^x+x+C$ ...**1p**
Așadar $f(x)=e^{e^x+x+C}$
Dar $f(0)=e$, prin urmare $e^{1+C}=e\ deci\ C=0$ ...**1p**

Astfel funcția cerută este $f(x) = e^{e^x + x}$

4. Se consideră funcțiile $f, g : (0,\infty) \to R,\ f(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ *si* $g(x) = \frac{x^2}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{x}{2} - \ln\sqrt{x+1}$.

a) **(3p)** Arătați că funcția g este o primitivă a funcției f.

b) **(4p)** Calculați $\int_1^e f(x)\cdot g(x)dx$.

Barem de corectare și notare

a) g este funcție continuă și derivabilă pe $(0,\infty)$ -compunere de funcții elementare **...1p**

calculul derivatei g'(x)=f(x) **…2p**

b) $\int_1^e f(x)\cdot g(x)dx = \int_1^e g'(x)g(x)dx = \left.\frac{g^2(x)}{2}\right|_1^e = \frac{g^2(e)-g^2(1)}{2}$ **…4p**