

OLIMPIADA DE MATEMATICA

FAZA LOCALĂ

15.02.2014

Clasa a VIII – a

1. (4 p) a) Calculați $\left[(2 + \sqrt{3})^{2014} + \frac{1}{(2 - \sqrt{3})^{2014}} \right] \cdot \frac{(4 - 2\sqrt{3})^{2014}}{2^{2013}}$
- (3 p) b) Determinați numerele raționale a și b astfel încât
- $$2a\sqrt{2} - b = a + b\sqrt{2} - 3 .$$
2. (4 p) a) Rezolvați ecuația $|x - 1| + |x - 2| + \dots + |x - 2013| = 2014(x - 2014)$.
- (3 p) b) Arătați că $x\sqrt{x} + y\sqrt{y} \geq x\sqrt{y} + y\sqrt{x}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}_+$
3. (7 p) În cubul $ABCD A' B' C' D'$, M este mijlocul laturii AB , $C' M \cap D' B = \{P\}$. Dacă $BP = 4\sqrt{3}$, aflați distanța de la punctul D la diagonala $D' B$.
4. În tetraedrul regulat $ABCD$ se consideră punctul M - mijlocul lui $[AB]$ și N - mijlocul lui $[AC]$. Dacă muchia tetraedrului este de 8 cm., determinați :
- (3 p) a) Perimetrul patrulaterului $BCNM$
- (2 p) b) măsura unghiului format de dreapta MN cu AB
- (2 p) c) distanța de la punctul C la planul (ABD) .

Notă : Toate subiectele sunt obligatorii,

Timpe de lucru : 3 ore

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 p.



BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
OLIMPIADA DE MATEMATICA
FAZA LOCALĂ
15.02.2014
Clasa a VIII – a

$$1. \quad a) \quad \frac{(2+\sqrt{3})^{2014} \cdot (2-\sqrt{3})^{2014} + 1}{(2-\sqrt{3})^{2014}} \cdot \frac{(4-2\sqrt{3})^{2014}}{2^{2013}} = \frac{(2^2-\sqrt{3}^2)^{2014} + 1}{(2-\sqrt{3})^{2014}} \cdot \frac{2^{2014} (2-\sqrt{3})^{2014}}{2^{2013}} =$$

$$(1^{2014} + 1) \cdot 2 = 4 \quad (4 \text{ p})$$

b) $(2a - b)\sqrt{2} = a + b - 3$

$(2a - b)\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ iar $a + b - 3 \in \mathbb{Q} \Rightarrow$

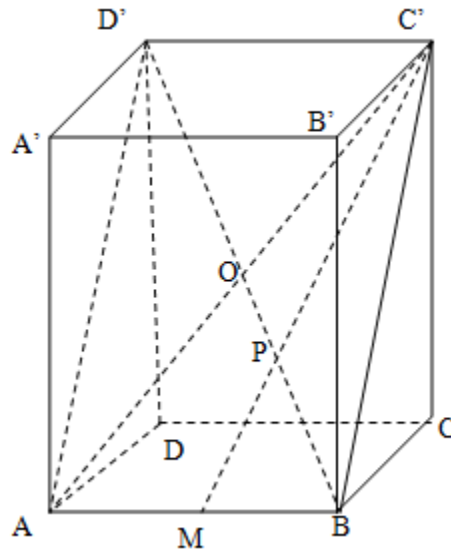
$$\begin{cases} 2a - b = 0 \\ a + b - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \quad (3 \text{ p})$$

2. a) Membrul stâng este pozitiv \Rightarrow membrul drept este pozitiv, deci $x - 2014 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2014 \Rightarrow x - 1 \geq 0, x - 2 \geq 0, \dots, x - 2013 \geq 0 \Rightarrow$
renunțând la module se obține

$$x - 1 + x - 2 + \dots + x - 2013 = 2014 \cdot (x - 2014) \Leftrightarrow 2013x - (1 + 2 + 3 + \dots + 2013) = 2014x - 2014^2 \Leftrightarrow 2013x - \frac{2013 \cdot 2014}{2} = 2014x - 2014^2 \Leftrightarrow x = 2014^2 - \frac{2013 \cdot 2014}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2 \cdot 2014^2 - 2013 \cdot 2014}{2} = 1007 \cdot 2015 \quad (4 \text{ p})$$

b) $x\sqrt{x} + y\sqrt{y} - x\sqrt{y} - y\sqrt{x} = x(\sqrt{x} - \sqrt{y}) - y(\sqrt{x} - \sqrt{y}) =$
 $(\sqrt{x} - \sqrt{y})(x - y) = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) =$
 $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \geq 0$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}_+$ (3 p)

3. Desen



(1 p)

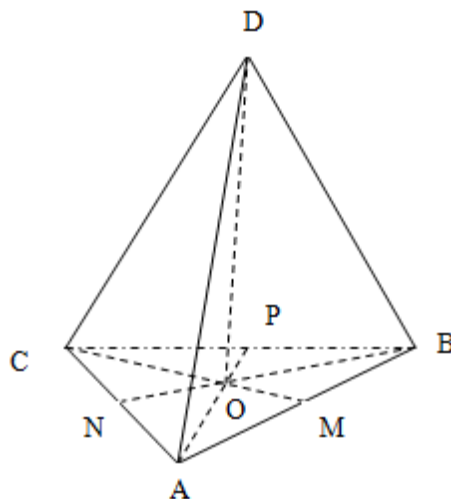
Unind C' cu $A \Rightarrow C'A$ diagonală în dreptunghiul $ABC'D'$, cu $AC' \cap BD' = \{O\}$.

În triunghiul ABC' , $C'M \cap BO = \{P\}$ (2 p)

P este centrul de greutate $\Rightarrow BP = \frac{2}{3}BO \Rightarrow \frac{2 \cdot l\sqrt{3}}{3 \cdot 2} = BP \Rightarrow l = \frac{3 \cdot 4\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$
 $\Rightarrow l = 12$ (muchia cubului) (2 p)

În triunghiul $D'DB$ cu $m(\sphericalangle D) = 90^\circ$ notăm $(D, BD') = DE$, $DE = \frac{DD' \cdot DB}{D'B} = 4\sqrt{6} \text{ cm}$ (2 p)

4. Desen



(1 p)

a) ΔABC , MN – linie mijlocie $\Rightarrow MN \parallel BC$, $MN = \frac{BC}{2} = 4 \text{ cm}$
 $BCNM$ – trapez isoscel $P_{BCNM} = BC + CN + NM + MB = 8 \text{ cm} + 3 \cdot 4 \text{ cm} = 20 \text{ cm}$ (2 p)

b) $MN \parallel BC$, AB secantă $m(\sphericalangle(MN, AB)) = 60^\circ$

Fie P mijl. lui $[BC] \Rightarrow AP \perp BC$

Cum $DO \perp (ABC) \Rightarrow DO \perp BC$, rezultă $\begin{cases} BC \perp (DPO) \\ AD \subset (DPO) \end{cases} \Rightarrow BC \perp AD$.

Din $MN \parallel BC$ și $AD \perp MN \Rightarrow m(\sphericalangle(MN, AD)) = 90^\circ$

c) $\begin{cases} AB \perp CM \\ AB \perp DM \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB \perp (CMD) \\ AB \subset (ABD) \end{cases} \Rightarrow (ABD) \perp (CDM)$

Construim $CE \perp DM$, $CE \subset (CDM) \Rightarrow CE \perp (ADB) \Rightarrow d(C, (ABD)) = CE$

În $\triangle CDM$, $DM = \frac{l\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$

Se aplică teorema lui Pitagora și se obține $DO = \frac{8\sqrt{6}}{3}$

$$A_{\triangle CDM} = \frac{CM \cdot DO}{2} = 16\sqrt{2}$$

$$A_{\triangle CDM} = \frac{DM \cdot CE}{2} = \frac{4\sqrt{3} \cdot CE}{2} = 2\sqrt{3} \cdot CE. \text{ Se obține } CE = \frac{8\sqrt{6}}{3} d(C, (ABD)) = \frac{8\sqrt{6}}{3} \text{ cm}$$

(2 p)