Barem clasa a IX-a
(OLM 2016-etapa locală)

Subiectul I. (7 puncte)

Dacă $x \in R$, $[x]+[-x]=\begin{cases} 0, & x \in Z \\ -1, & x \in R \setminus Z \end{cases}$ **(2 puncte)**

1) $x \in R \setminus Z$

$$\sum_{k=1}^{2n}\left([x]+\left[(-1)^k x+k\right]\right)=\sum_{k=1}^{2n}[x]+\sum_{k=1}^{2n}\left[(-1)^k x\right]+\sum_{k=1}^{2n}k=$$
$$=2n[x]+\underbrace{[-x]+[x]}_{-1}+\underbrace{[-x]+[x]}_{-1}+\ldots+\underbrace{[-x]+[x]}_{-1}+n(2n+1)$$
$$=2n[x]-n+2n^2+n=2n[x]+2n^2$$ **(2 puncte)**

$$2n[x]+2n^2=2n^2+4n \Leftrightarrow [x]=2 \Leftrightarrow x \in (2,3)$$ **(1 punct)**

2) $x \in Z$, $2n[x]+n=4n \Leftrightarrow [x]=\frac{3}{2}$ imposibil. **(2 puncte)**

Subiectul II. (7 puncte)

Avem $xy+z-3=xy+(4-x-y)-3=xy-x-y+1=(x-1)(y-1)$ şi analoagele. **(3 puncte)**

$$E=\frac{1}{(x-1)(y-1)}+\frac{1}{(y-1)(z-1)}+\frac{1}{(z-1)(x-1)}=\frac{x+y+z-3}{(x-1)(y-1)(z-1)}=$$
$$=\frac{1}{xyz-(xy+yz+zx)+(x+y+z)-1}=\frac{1}{a+3-(xy+yz+zx)}.$$ **(2 puncte)**

Cum $xy+yz+zx=\frac{1}{2}\left[(x+y+z)^2-\left(x^2+y^2+z^2\right)\right]=\frac{1}{2}(16-6)=5$, obţinem $E=\frac{1}{a-2}$. **(2 puncte)**

Subiectul III. (7 puncte)

Notăm: $\frac{MA}{MA}=\frac{NB}{NC}=\frac{PC}{PD}=\frac{QD}{QA}=k$, cu O intersecţia dintre AC şi BD, cu α raportul dintre OC şi OA şi cu β raportul dintre OD şi OB.

$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{1+k}\cdot\overrightarrow{OA}+\frac{k}{1+k}\cdot\overrightarrow{OB}$; **(1 punct)**

$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{1+k}\cdot\overrightarrow{OC}+\frac{k}{1+k}\cdot\overrightarrow{OD}=\frac{1}{1+k}\cdot\alpha\overrightarrow{OA}+\frac{k}{1+k}\cdot\beta\overrightarrow{OB}$; **(2 puncte)**

MP, AC şi BD = concurente $\Leftrightarrow O \in MP \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}$ şi $\overrightarrow{OP}$ = coliniari $\Leftrightarrow \frac{1}{1+k}\cdot\frac{1+k}{\alpha}=\frac{k}{1+k}\cdot\frac{1+k}{k\cdot\beta} \Leftrightarrow \alpha=\beta$.

Dar $\alpha=\beta \Leftrightarrow \frac{OC}{OA}=\frac{OD}{OB} \Leftrightarrow CD \parallel AB$. **(2 puncte)**

Analog se arată că $AD \parallel BC$.Astfel, cerinţa este demonstrată. **(2 puncte)**

Subiectul IV. (7 puncte)

Din relaţia lui Sylvester avem: $\overrightarrow{OH_1}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OH_2}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OH_3}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{OH_4}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}$, O fiind centru cercului circumscris hexagonului. **(2 puncte)**

Arătăm că $H_1H_2H_3H_4$ este paralelogram. Astfel $\overrightarrow{H_1H_2}=\overrightarrow{OH_2}-\overrightarrow{OH_1}=\overrightarrow{AD}$ şi $\overrightarrow{H_4H_3}=\overrightarrow{OH_3}-\overrightarrow{OH_4}=\overrightarrow{AD}$, de unde $\overrightarrow{H_1H_2}=\overrightarrow{H_4H_3}$ adica $H_1H_2H_3H_4$ este paralelogram. **(2 puncte)**

Atunci oricare ar fi S un punct in plan, are loc relaţia $\overrightarrow{SH_1}+\overrightarrow{SH_3}=\overrightarrow{SH_2}+\overrightarrow{SH_4}$ (1) **(1 punct)**

Avem $\overrightarrow{H_1M}=\overrightarrow{SM}-\overrightarrow{SH_1}$, $\overrightarrow{H_2N}=\overrightarrow{SN}-\overrightarrow{SH_2}$, $\overrightarrow{H_3P}=\overrightarrow{SP}-\overrightarrow{SH_3}$, $\overrightarrow{H_4Q}=\overrightarrow{SQ}-\overrightarrow{SH_4}$. **(1 punct)**

Tinând cont de relaţia din enunţ şi relatia (1), obţinem că $\overrightarrow{SM}+\overrightarrow{SP}=\overrightarrow{SN}+\overrightarrow{SQ}$, deci MNPQ paralelogram. **(1 punct)**