

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală
21 februarie 2016

Clasa a IX-a

1. Fie șirul $(d_n)_{n \geq 1}$ definit descriptiv, astfel:

$$d_1 = 0,1; d_2 = 0,11; d_3 = 0,111; \dots; d_n = 0, \underbrace{11 \dots 1}_{n \text{ ori}}.$$

a) Să se găsească primele 2016 zecimale ale numărului $\sqrt{d_{4032}}$.

b) Să se găsească suma: $\sum_{k=1}^n 10^k \cdot d_k$.

2. Fie numerele $x, a, b \in (0; +\infty)$ astfel încât $a + b = 2$. Demonstrați că:

$$\sqrt{x + \frac{1}{a^2}} + \sqrt{x + \frac{1}{b^2}} \geq 2\sqrt{x+1}.$$

3. Fie $ABCD$ un patrulater convex, M mijlocul lui AB , N mijlocul lui BC , E punctul de intersecție a dreptelor AN și BD , iar F punctul de intersecție a dreptelor DM și AC . Arătați că dacă $BE = \frac{1}{3}BD$ și $AF = \frac{1}{3}AC$, atunci $ABCD$ este paralelogram.

4. Se consideră hexagonul convex $ABCDEF$ și se notează cu $G_A, G_B, G_C, G_D, G_E, G_F$ centrele de greutate pentru pentagoanele $BCDEF, ACDEF, ABDEF, ABCEF, ABCDF, ABCDE$.

a) Să se demonstreze că se poate construi un hexagon cu vectorii:

$$\overrightarrow{AG_A}, \overrightarrow{BG_B}, \overrightarrow{CG_C}, \overrightarrow{DG_D}, \overrightarrow{EG_E}, \overrightarrow{FG_F}.$$

b) Să se determine raportul ariilor hexagoanelor $G_A G_B G_C G_D G_E G_F$ și $ABCDEF$.

Notă:

- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Timp de lucru: 3 ore

Soluții clasa a IX-a:

1.a) Deoarece $x \in (0, 1) \Rightarrow x < \sqrt{x} < 1$ (*). Considerăm $x = 0, \underbrace{99 \dots 9}_{4032 \text{ ori}} = 1 - \frac{1}{10^{4032}}$. Folosind relația (*), deducem că primele 2016 zecimale ale lui \sqrt{x} vor fi egale cu 9. Cum $d_{4032} = \frac{x}{9}, \sqrt{d_{4032}} = \frac{\sqrt{x}}{3} = 0, \underbrace{33 \dots 3}_{2016 \text{ ori}} \dots$. În concluzie primele 2016 zecimale ale numărului $\sqrt{d_{4032}}$ sunt egale cu 3.

$$\begin{aligned} \text{b) } \sum_{k=1}^n 10^k \cdot d_k &= 1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{111 \dots 1}_{n \text{ ori}} = \\ &= \frac{1}{9} \cdot (10 - 1) + \frac{1}{9} \cdot (10^2 - 1) + \dots + \frac{1}{9} \cdot (10^n - 1) = \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{10 \cdot (10^n - 1)}{10 - 1} - n \right) = \\ &= \frac{10}{81} \cdot (10^n - 1) - \frac{n}{9}. \end{aligned}$$

2. Din $a + b = 2 \Rightarrow 1 = \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, de unde rezultă $\sqrt{ab} \leq 1$.

Prin ridicare la pătrat a inegalității date obținem:

$$x + \frac{1}{a^2} + x + \frac{1}{b^2} + 2\sqrt{\left(x + \frac{1}{a^2}\right)\left(x + \frac{1}{b^2}\right)} \geq 4x + 4.$$

$$\begin{aligned} \text{Dar } \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} &\geq 2\sqrt{\frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{b^2}} = \frac{2}{ab} \geq 2 \quad (1) \text{ și } \sqrt{\left(x + \frac{1}{a^2}\right)\left(x + \frac{1}{b^2}\right)} = \sqrt{x^2 + x\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) + \frac{1}{a^2b^2}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sqrt{x^2 + x\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) + \frac{1}{a^2b^2}} \geq \sqrt{x^2 + 2x + 1} \Rightarrow \sqrt{\left(x + \frac{1}{a^2}\right)\left(x + \frac{1}{b^2}\right)} \geq x + 1 \quad (2). \end{aligned}$$

Din relațiile (1) și (2) rezultă inegalitatea cerută.

3. $ABCD$ este paralelogram $\Leftrightarrow \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$. Fie $\overrightarrow{AB} = \vec{u}, \overrightarrow{BC} = \vec{v}, \overrightarrow{CD} = a\vec{u} + b\vec{v}$, cu a și b numere reale. Rezultă:

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = (a+1)\vec{u} + (b+1)\vec{v},$$

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}, \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = a\vec{u} + (b+1)\vec{v}, \overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} = \frac{a}{3}\vec{u} + \frac{b+1}{3}\vec{v},$$

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \frac{a+3}{3}\vec{u} + \frac{b+1}{3}\vec{v};$$

$$\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AF} = -(a+1)\vec{u} - (b+1)\vec{v} + \frac{1}{3}(\vec{u} + \vec{v}) = -\left(a + \frac{2}{3}\right)\vec{u} - \left(b + \frac{2}{3}\right)\vec{v},$$

$$\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AM} = -(a+1)\vec{u} - (b+1)\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{u} = -\left(a + \frac{1}{2}\right)\vec{u} - (b+1)\vec{v}.$$

Din $\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AN}$ coliniari deducem: $a - 2b + 1 = 0$. Analog din $\overrightarrow{DF}, \overrightarrow{DM}$ coliniari urmează că $2a + b + 2 = 0$. Rezultă $a = -1; b = 0$. În concluzie, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$.

4. Pentru orice punct X din plan notăm cu \vec{r}_X vectorul de poziție asociat, iar cu

$\vec{r} = \vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C + \vec{r}_D + \vec{r}_E + \vec{r}_F$. Avem:

$$\vec{r}_{G_A} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_A}{5}, \vec{r}_{G_B} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_B}{5}, \vec{r}_{G_C} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_C}{5}, \vec{r}_{G_D} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_D}{5}, \vec{r}_{G_E} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_E}{5}, \vec{r}_{G_F} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_F}{5}.$$

a) Cu vectorii $\vec{AG}_A, \vec{BG}_B, \vec{CG}_C, \vec{DG}_D, \vec{EG}_E, \vec{FG}_F$ se poate construi un hexagon dacă și numai dacă $\vec{AG}_A + \vec{BG}_B + \vec{CG}_C + \vec{DG}_D + \vec{EG}_E + \vec{FG}_F = \vec{0}$.

$$\begin{aligned} & \vec{AG}_A + \vec{BG}_B + \vec{CG}_C + \vec{DG}_D + \vec{EG}_E + \vec{FG}_F = \vec{0} \\ & = (\vec{r}_{G_A} - \vec{r}_A) + (\vec{r}_{G_B} - \vec{r}_B) + (\vec{r}_{G_C} - \vec{r}_C) + (\vec{r}_{G_D} - \vec{r}_D) + (\vec{r}_{G_E} - \vec{r}_E) + (\vec{r}_{G_F} - \vec{r}_F) = \\ & = \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}_A}{5} - \vec{r}_A \right) + \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}_B}{5} - \vec{r}_B \right) + \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}_C}{5} - \vec{r}_C \right) + \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}_D}{5} - \vec{r}_D \right) + \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}_E}{5} - \vec{r}_E \right) + \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}_F}{5} - \vec{r}_F \right) = \\ & = \frac{6}{5} \left(\vec{r} - (\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C + \vec{r}_D + \vec{r}_E + \vec{r}_F) \right) = \frac{6}{5} (\vec{r} - \vec{r}) = \vec{0}. \end{aligned}$$

b) $\vec{G_A G_B} = \vec{r}_{G_B} - \vec{r}_{G_A} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_B}{5} - \frac{\vec{r} - \vec{r}_A}{5} = \frac{\vec{r}_A - \vec{r}_B}{5} = \frac{1}{5} \vec{BA}$. Analog:

$$\vec{G_B G_C} = \frac{1}{5} \vec{CB}, \vec{G_C G_D} = \frac{1}{5} \vec{DC}, \vec{G_D G_E} = \frac{1}{5} \vec{ED}, \vec{G_E G_F} = \frac{1}{5} \vec{FE}, \vec{G_F G_A} = \frac{1}{5} \vec{AF}.$$

Hexagoanele $G_A G_B G_C G_D G_E G_F$ și $ABCDEF$ au laturile paralele, deci sunt asemenea,

raportul de asemănare fiind $\frac{1}{5} \Rightarrow \frac{A_{[G_A G_B G_C G_D G_E G_F]}}{A_{[ABCDEF]}} = \left(\frac{1}{5} \right)^2 = \frac{1}{25}$.