INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN IALOMIȚA
Str. Lacului Nr. 19,Slobozia Ialomița
Tel/Fax: 0243/231825; 0372705073; Fax: 0243/231825
E-mail: secretariat@isjialomita.ro

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE ŞI CERCETĂRII ŞTIINȚIFICE

Olimpiada de matematică

Etapa locală, 21 februarie 2016

Clasa a VI-a

1) Fie numărul natural $X = 1 + 7 + 7^2 + 7^3 + \ldots + 7^{2015}$.

a) Aflați ultima cifră a lui X.

b) Arătați că $6X = 7^{2016} - 1$.

c) Demonstrați că X este divizibil cu 19.

2) a) Aflați numere prime a, b, c, dacă $5a + 10b + 52c = 5184$.

b) Numerele 8000, 7930 și 8070 împărțite la același număr natural n, dau resturile 8, 10 și respectiv 6. Aflați cea mai mare și cea mai mică valoare a lui n.

3) Fie unghiurile AOB, BOC, COD şi DOA formate în jurul punctului O care nu au puncte interioare comune astfel încât

$2 \cdot m(\ AOB) = 3 \cdot m(\ BOC) = 4 \cdot m(\ COD) = 6 \cdot m(\ DOA)$.

a) Aflați măsurile unghiurilor AOB, BOC, COD și DOA.

b) Dacă [OM şi [ON sunt bisectoarele unghiurilor AOB şi BOC, stabiliți dacă unghiul MON este ascuțit, drept sau obtuz.

4) Aflați valorile numărului natural n pentru care numerele n + 1, n + 7, n + 13, n + 15 și n + 19 sunt simultan numere prime.

Notă : Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect are 7 puncte. Nu se acordă puncte din oficiu. Timp de lucru 2 ore și 30 de minute.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IALOMIŢA
Str. Lacului Nr. 19,Slobozia Ialomița
Tel/Fax: 0243/231825; 0372705073; Fax: 0243/231825
E-mail: secretariat@isjialomita.ro

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

Barem de corectare și notare

Olimpiada de matematică, etapa locală, 21 februarie 2016

Clasa a VI-a

Notă : Orice soluție corectă, diferită de cea din barem, se notează cu punctajul corespunzător.

2) Fie numărul natural $X = 1 + 7 + 7^2 + 7^3 + \ldots + 7^{2015}$.

a) Aflați ultima cifră a lui X.

b) Arătați că $6X = 7^{2016} - 1$.

c) Demonstrați că X este divizibil cu 19.

Soluție:

a) Observăm că ultima cifră a sumei a patru puteri consecutive ale lui 7 este 0 . . . . 1p
și că X are 2016 termeni, deci putem să-i grupăm câte patru (2016 4):

$X = (1 + 7 + 7^2 + 7^3) + (7^4 + 7^5 + 7^6 + 7^7) + \ldots + (7^{2012} + 7^{2013} + 7^{2014} + 7^{2015})$,
deci ultima cifră a lui X este 0. . . . . . . 1p

b) Înmulțim cu 7 egalitatea din enunț și obținem:

$7X = 7 + 7^2 + 7^3 + \ldots + 7^{2016}$ 1p

Adunăm 1 în ambii membri ai egalității de mai sus și obținem:

$7X + 1 = 1 + 7 + 7^2 + \ldots + 7^{2015} + 7^{2016}$, cum $X = 1 + 7 + 7^2 + 7^3 + \ldots + 7^{2015}$,
avem $7X + 1 = X + 7^{2016}$, deci $6X = 7^{2016} - 1$. 1p

c) Observăn că: $1 + 7 + 7^2 = 57 = 19 \cdot 3$ 19 . . . . 1p

X are 2016 termeni, deci putem să-i grupăm câte 3 (2016 3) și avem:

$X = (1 + 7 + 7^2) + (7^3 + 7^4 + 7^5) + \ldots + (7^{2013} + 7^{2014} + 7^{2015}) =$

$= 57 + 57 \cdot 7^3 + \ldots + 57 \cdot 7^{2013}$ 1p

Finalizare: X 19, pentru că toți termenii sunt divizibili cu 19. . 1p

Total: 7p

2) a) Aflați numere prime a, b, c, dacă 5a + 10b + 52c = 5184.

b) Numerele 8000, 7930 și 8070 împărțite la același număr natural n, dau resturile 8, 10 și respectiv 6. Aflați cea mai mare și cea mai mică valoare a lui n.

Soluție:

a) Studiind paritatea termenilor relației din enunț observăm că a este par, cum a este și prim, rezultă că a = 2. . . . . . 1p

Înlocuim a cu 2, separăm și reducem termenii asemenea, apoi împărțim la 2 și obținem egalitatea 5b + 26c = 2587, cum 26 13 și 2587 13, rezultă că 5b 13 cum (5;13)=1, rezultă că b 13, dar b este prim, deci b = 13. . 1p

Înlocuim b cu 13 și obținem c = 97 care este număr prim . . 1p

b) Din condiția restului avem n > 10 (1) 1p

n divide diferența dintre deîmpărțit și rest, deci n|(7992; 7920; 8064) 1p

Cum (7992; 7920; 8064) = 72, rezultă că n D_{72}= { 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72 } (2) 1p

Finalizare: din (1) și (2), avem cea mai mare valoare a lui n este 72 și cea mai mică este 12. . . . . 1p

Total: 7p

3) Fie unghiurile AOB, BOC, COD şi DOA formate în jurul punctului O care nu au puncte interioare comune astfel încât

2 · m (AOB) = 3 · m (BOC) = 4 · m (COD) = 6 · m (DOA).

a) Aflați măsurile unghiurilor AOB, BOC, COD și DOA.

b) Dacă [OM şi [ON sunt bisectoarele unghiurilor AOB şi BOC, stabiliți dacă unghiul MON este ascuțit, drept sau obtuz.

Soluție:

a) Notăm 12x = 2·m(AOB) = 3·m(BOC) = 4·m(COD) = 6·m(DOA), x>0 . . . . 1p

Avem m(AOB) = 6x, m(BOC) = 4x, m(COD) = 3x și m(DOA) = 2x 1p

Cum suma unghiurilor din jurul unui punct este 360^0, obținem ecuația

$6x + 4x + 3x + 2x = 360^0$ 1p

cu soluția $x = 24^0$ 1p

Deci m(AOB) = 144^0, m(BOC) = 96^0, m(COD) = 72^0 și m(DOA) = 48^0. 1p

b)Avem m(MON) = m(MOB) + m(BON) = [m(AOB) + m(BOC)] : 2 =

= (144^0 + 96^0) : 2 = 120^0 . . . . 1p

Finalizare: MON este obtuz. 1p

Total: 7p

4) Aflați valorile numărului natural n pentru care numerele n + 1, n + 7, n + 13, n + 15 și n + 19 sunt simultan numere prime.

Soluție:

La împărțirea cu 5 se obțin 5 resturi: 0, 1, 2, 3, 4, deci n este de forma 5k, 5k + 1, 5k + 2, 5k + 3 sau 5k + 4, k 1p

Dacă n = 5k, atunci n + 15 = 5(k + 3) = număr compus, k + 3 > 1 . 1p

Dacă n = 5k+1, atunci n + 19 = 5(k + 4) = număr compus, k + 4 > 1 1p

Dacă n = 5k+2, atunci n + 13 = 5(k + 3) = număr compus, k + 3 > 1 1p

Dacă n = 5k+3, atunci n + 7 = 5(k + 2) = număr compus, k + 2 > 1 1p

Dacă n = 5k+4, atunci n + 1 = 5(k + 1) = număr prim numai dacă k + 1 = 1 deci k = 0 și n = 4 . . . . 1p

Dacă n = 4, atunci n + 1 = 5, n + 7 = 11, n + 13 = 17, n + 15 = 19 și n + 19 = = 23, cum 5, 11, 17, 19 și 23 sunt numere prime rezultă că n = 4 este soluția problemei 1p

Total: 7p