CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
"LAURENȚIU PANAITOPOL"

Tulcea, 1 aprilie 2023

CLASA a 10-a – soluții

Problema 1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația

$$12^{2^x} + 15^{2^x} + 16^{2^x} = 5^{4^x}.$$

Mihai Opincariu, Brad

Soluție. Cu notația $2^x = t$, ecuația se rescrie $12^t + 15^t + 16^t = 5^{t^2}$, ... **1p**
care prin împărțire cu 25^t devine $\left(\frac{12}{25}\right)^t + \left(\frac{15}{25}\right)^t + \left(\frac{16}{25}\right)^t = 5^{t^2-2t}$ $(*)$ **1p**
Observăm că $t = 2$ verifică $(*)$, ambii membri fiind egali cu 1 ..... **1p**
Definim funcția $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ prin $f(t) = \left(\frac{12}{25}\right)^t + \left(\frac{15}{25}\right)^t + \left(\frac{16}{25}\right)^t$. Funcția f este strict descrescătoare, ca sumă de funcții strict descrescătoare **1p**
Dacă $t > 2$ atunci $f(t) < f(2) = 1$.
Pe de altă parte, dacă $t > 2$, atunci $t^2 - 2t > 0$ și deci $5^{t^2-2t} > 1$ și deci $(*)$ nu poate avea loc. **2p**
Dacă $t \in (0, 2)$ se demonstrează analog că $(*)$ nu poate avea loc. **1p**

Problema 2. Se consideră numerele reale $x_1, x_2, \ldots, x_{2023} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ astfel încât $\sum\limits_{i=1}^{2023} \cos^2 x_i = 1$. Demonstrați că minimul sumei $\sum\limits_{i=1}^{2023} \operatorname{ctg} x_i$ este egal cu 2.

Cătălin Gherghe, București

Soluție.
Pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ avem

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{2\cos^2 x}{2\cos x \sin x} = \frac{2\cos^2 x}{\sin 2x} \geq 2\cos^2 x,$$

deoarece $0 < \sin 2x \leq 1$. Deci $\operatorname{ctg} x \geq 2\cos^2 x$ pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.
Deci $\sum\limits_{i=1}^{2023} \operatorname{ctg} x_i \geq 2 \sum\limits_{i=1}^{2023} \cos^2 x_i \geq 2$ **4p**
Pentru $x_1 = x_2 = \frac{\pi}{4}$ și $x_3 = x_4 = \cdots = x_{2023} = \frac{\pi}{2}$ avem

$$\sum_{i=1}^{2023} \cos^2 x_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 + \cdots + 0 = 1 \text{ și } \sum_{i=1}^{2023} \operatorname{ctg} x_i = 1 + 1 + 0 + \cdots + 0 = 2.$$

Deci minimul sumei este egal cu 2. ..... **3p**

Problema 3. Fie mulțimea de numere reale:

$$M = \{\log_2 3, \log_3 4, \log_4 5, \ldots, \log_{2023} 2024\}.$$

a) Demonstrați că $\log_2 3 < \frac{5}{3}$.
b) Demonstrați că $[a+b] = 2$, pentru orice $a, b \in M$, cu $a \neq b$. Am notat cu $[x]$ partea întreagă a numărului real x.

Traian Preda, București

Soluție. a) Deoarece $3^3 < 2^5$ rezultă $\log_2 3 < \frac{5}{3}$ **1p**

b) Deoarece $4^3 < 3^4$ rezultă $\log_3 4 < \frac{4}{3}$ și deci $2 < \log_2 3 + \log_3 4 < \frac{5}{3} + \frac{4}{3} = 3$ de unde rezultă $[\log_2 3 + \log_3 4] = 2$..... **2p**

Este adevărată inegalitatea $\log_n(n+1) > \log_{n+1}(n+2)$, pentru orice număr $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ **1p**

Inegalitatea se demonstrează observând mai întâi că este echivalentă cu

$$\lg^2(n+1) > \lg n \cdot \lg(n+2)$$

care se rescrie

$$\lg(n+1) > \sqrt{\lg n \cdot \lg(n+2)}.$$

Aplicăm acum inegalitatea mediilor

$$\sqrt{\lg n \cdot \lg(n+2)} < \frac{\lg n + \lg(n+2)}{2} = \frac{\lg(n^2+2n)}{2} < \frac{\lg(n+1)^2}{2} = \lg(n+1).$$

..... **2p**

Avem deci

$$\log_2 3 > \log_3 4 > \cdots > \log_{2023} 2024 > 1.$$

În sfârșit, pentru orice $a, b \in M$, cu $a \neq b$, avem

$$2 < a + b \leq \log_2 3 + \log_3 4 < 3,$$

adică $[a+b] = 2$. **1p**

Problema 4. a) Reprezentați grafic în plan mulțimea punctelor de afix $z \in \mathbb{C}$ pentru care $|z+1| \leq \frac{3}{4}$.

b) Arătați că pentru orice număr complex $z \in \mathbb{C}$ avem $|z+1| > \frac{3}{4}$ sau $|z^2+1| > 1$.

Laurențiu Panaitopol

Soluție. a) Mulțimea punctelor de afix $z \in \mathbb{C}$ pentru care $|z+1| \leq \frac{3}{4}$ este discul $\mathcal{D}$ cu centrul în punctul de coordonate $(-1, 0)$ și rază $\frac{3}{4}$ **1p**

b) Presupunem că $|z+1| \leq \frac{3}{4}$, adică punctele cu aceste afixe se află discul $\mathcal{D}$. Demonstrăm că $|z^2+1| > 1$ **1p**

Se observă că $|z^2+1| = |(z-i)(z-(-i))| = |z-i| \cdot |z-(-i)| = PA \cdot PB$ unde $P(z)$ este orice punct din discul $\mathcal{D}$ iar A și B sunt punctele de afixe i și respectiv $-i$. Echivalent, arătăm că $PA \cdot PB > 1$ **1p**

Minimul produsului $PA \cdot PB$ se realizează pentru puncte P aflate pe cercul $\mathcal{C}$ cu centrul în punctul de coordonate $(-1, 0)$ și rază $\frac{3}{4}$ **1p**

Acest fapt se poate demonstra considerând cercul $\mathcal{E}$ care trece prin punctele A, B și P, unde P este un punct din interiorul discului $\mathcal{D}$. Fie M un punct în care acest cerc

intersectează cercul $\mathcal{C}$. Exprimăm aria triunghiului PAB în două moduri și obținem $PA \cdot PB \cdot \sin(\angle APB) = PP' \cdot AB$, unde PP' este înălțimea triunghiului ABP. Este clar că $PA \cdot PB > MA \cdot MB$ când punctul P descrie arcul cercului $\mathcal{E}$ aflat în interiorul cercului $\mathcal{C}$, deoarece unghiul $\angle APB$ este constant. **1p**

În final se arată că $PA \cdot PB > 1$ pentru orice $P \in \mathcal{C}$ **2p**

Ultima inegalitate se poate demonstra direct revenind la calcule obișnuite cu numere complexe sau rescriind în coordonate carteziene condiția (cu notațiile de mai sus) $((PP')^2 + (AP')^2)((PP')^2 + (BP')^2 > 1$.

Comentariu: problema admite și o soluție pur calculatorie. Pentru astfel de abordări se pot acorda și punctaje parțiale:

Presupunem că există $z \in \mathbb{C}$ cu $|z+1| \leq \frac{3}{4}$ și $|z^2+1| \leq 1$. Dacă $z = a+ib$ cu $a, b \in \mathbb{R}$ cele două condiții devin $(a+1)^2 + b^2 \leq \frac{9}{16}$ și respectiv $(a^2 - b^2 + 1)^2 + 4a^2b^2 \leq 1$ **2p**

Inegalitățile de mai sus se rescriu prin $b^2 \leq \frac{9}{16} - (a+1)^2$ (1) și respectiv $b^4 + 2b^2(a^2-1) + 2a^2 + a^4 \leq 0$ (2) **1p**

Considerăm pe (2) ca o inecuație de gradul al 2-lea în b^2. Avem $\Delta = 4(1-4a^2) \geq 0$ și $b^2 \geq 1 - a^2 - \sqrt{1-4a^2}$ (3) **1p**

Din (1) și (3) obținem inecuația $\sqrt{1-4a^2} \geq 2a + \frac{23}{16}$ (3) **1p**
care împreună cu condiția $|a| \leq \frac{1}{2}$ va conduce (după câteva calcule) la o contradicție **2p**