OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16 februarie 2013

Clasa a VII- a

SUBIECTUL I (7p)

Fie numerele $x = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2011}{2012}$ şi $y = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{2012}{2013}$.

a) Arătaţi că $\frac{n-1}{n} < \frac{n}{n+1}, (\forall) n \in N, n \geq 2$;

b) Demonstraţi că $x < y$;

c) Aflaţi prima zecimală a lui x.

SUBIECTUL II (7p)

Fie n un număr natural nenul. Demonstraţi:

a) Dacă $\sqrt{n} \in \mathbf{Q}$ atunci $\sqrt{n} \in \boldsymbol{N}$;

b) $\sqrt{n^2+1} \in \boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q}$;

c) Există o infinitate de numere $r \in \boldsymbol{Q}$ astfel încât $\sqrt{kr+2012} \in \boldsymbol{Q}$ şi $\sqrt{kr+2013} \in \boldsymbol{Q}$, unde $k \in \boldsymbol{Q}^*$ este dat.

SUBIECTUL III (7p)

Fie Mşi N mijloacele laturilor $[AD]$, respectiv $[DC]$ ale rombului $ABCD$ şi $BM \cap AC = \{P\}$, iar $BN \cap AC = \{T\}$.

a) Arătaţi că $MNTP$ este trapez isoscel;

b) Dacă $AN \cap BD = \{G\}$ şi $GP \perp AB$, demonstraţi că $ABCD$ este pătrat.

SUBIECTUL IV (7p)

În triunghiul ABC, $m(< ABC) = 2 \cdot m(< ACB)$ şi $AD \perp BC$, $(D \in BC)$. Punctele E şi C sunt situate de o parte şi de alta a dreptei AB astfel încât $BE \perp AE$ şi $< EAB \equiv < ACB$. Bisectoarea $< AED$ intersectează dreapta AC în M. Dacă $AE \cap BC = \{H\}$, arătaţi că:

a) Triunghiurile BHA şi AHC sunt isoscele;

b) $MCDE$ este paralelogram;

c) Perimetrul paralelogramului $MCDE$ este egal cu cel al triunghiului ABC.

Gazeta Matematică

Subiecte selectate şi prelucrate de prof. Daniel Poroşniuc

Notă:

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Timp de lucru: 3 ore**

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ
Botoşani, 16.02.2013

Clasa a VII-a
Barem de notare

Subiectul 1.

a) $\frac{n-1}{n} < \frac{n}{n+1} \Leftrightarrow (n-1)(n+1) < n^2 \Leftrightarrow n^2 - 1 < n^2$ adevărat…………………..………..2p

b) $\hat{I}n\ inegalitatea\ de\ la\ a)\ d\breve{a}m\ lui\ n\ valorile\ 2,4,6,\dots,2012\ \c{s}i\ ob\c{t}inem$

$\frac{1}{2} < \frac{2}{3}, \frac{3}{4} < \frac{4}{5}, \frac{3}{4} < \frac{4}{5}, \dots, \frac{2011}{2012} < \frac{2012}{2013}$…………………………………………………...1p

$Prin\ \hat{i}nmul\c{t}irea\ membru\ cu\ membru\ a\ inegalit\breve{a}\c{t}ilor\ \Rightarrow\ x < y$……………………1p

c) $x < z \Rightarrow x^2 < xy = \frac{1}{2013} < \frac{1}{2000} = 0{,}0005$……………………………………………………..2p

x^2 are partea întreagă şi primele trei zecimale nule, deci x are prima zecimală egală cu 0…1p

Subiectul 2.

a) $\sqrt{n} = \frac{p}{q}, p, q \in N^*, (p,q) = 1 \Rightarrow n = \frac{p^2}{q^2} \in N \Rightarrow q^2/p^2 \Rightarrow q/p$……………………………1p

$(p,q) = 1\ \c{s}i\ q/p \Rightarrow q = 1 \Rightarrow \sqrt{n} = p \in N$……………………………………...………1p

b) Prin reducere la absurd presupunem că $\sqrt{n^2+1} \in Q \Rightarrow \sqrt{n^2+1} = p \in N \Rightarrow p^2 - n^2 = 1 \Rightarrow (p-n)(p+n) = 1$ ……………………………………………………………...…1p

Prin urmare $p - n = p + n = 1 \Rightarrow n = 0\ contradic\c{t}ie\ \Rightarrow\ \sqrt{n^2+1} \in \boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q}$ ………………..1p

c) Există o infinitate de numere pitagoreice $m, n, p \in N, m = a^2 - b^2, n = 2ab, p = a^2 + b^2, a, b \in N, a > b$ astfel încât $m^2 + n^2 = p^2$………………………………………….….1p

Alegem $r = \frac{1}{k}\left(\frac{m^2}{n^2} - 2012\right) \in Q \Rightarrow \sqrt{kr + 2012} = \frac{m}{n} \in \boldsymbol{Q}$ $\boldsymbol{\c{s}i}$ $\sqrt{kr+2013} = \frac{p}{n} \in \boldsymbol{Q}$ ……..…2p

Subiectul 3.

a) MN este linie mijlocie în $\triangle$DAC deci MN $\parallel$ TP…………………………………………...1p

MP $\cap$ NT=$\{B\}$ deci MP$\nparallel$NT ……………………………………………………………0,5p

BM=BN …………………………………………………………………………0,5p

Din Teorema lui Thales în $\triangle$BMN obţinem PM = TN deci MNTP trapez isoscel…........1p

b) P este centrul de greutate al $\triangle$ABD şi G este centrul de greutate al $\triangle$DAC……………..1p

În $\triangle$OAD din reciproca Teoremei lui Thales, PG$\parallel$AD……………………………………...2p

Dar PG⊥AB deci AD⊥AB şi ABCD este pătrat……………………………………………1p

Subiectul 4.

a) $< ABC$ este exterior △ABH şi din teorema unghiului exterior avem $< EAB \equiv BHA$.

Deci △BHA este isoscel………………………………………………………………………1p

$< ACB \equiv AHB$ deci △AHC este isoscel……………………………………………………0,5p

b) BE înălţime în △BHA isoscel ⇒E mijlocul lui AH………………………………… 0,5p

AD înălţime în △AHC isoscel ⇒ D mijlocul lui HC……………………………….....0,5p

ED linie mijlocie în △AHC deci ED‖MC…………………………………………… 0,5p

$< EDB \equiv< ACB$(corespondente)$\equiv< EAB$. Fie AB∩ED={S}. Din △SBD şi △SEA obţinem $< ABD \equiv< AED$. ……………………………………………………………1,5p

(EM este bisectoarea $< AED$ deci $< MED \equiv< EDB$ şi astfel EM‖DC……………......1p

Prin urmare MCDE este paralelogram……………………………………………….0,5p

c) $P_{MCDE} = P_{ABC}$…………………………………………………………………..1p