Olimpiada naţională de matematică

etapa locală

28.02.2015

Clasa a VI-a

1. a) Să se rezolve în mulțimea numerelor prime ecuația:

$$3a + 5b + 11c = 116$$

b) Să se demonstreze că numărul $a = 8^n \cdot 5^{3n+1} + 1$ nu este prim, $(\forall) n \in N$.

2. Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale ecuația: $\frac{1}{x-2013} + \frac{1}{y-2013} = 1$.

3. Măsurile unghiurilor formate în jurul unui punct O sunt exprimate prin numere naturale, puteri ale numărului 2. Aflați numărul cel mai mic de unghiuri care satisfac cerințele problemei și în acest caz determinați măsurile acestor unghiuri.

4. Lungimea segmentului $[AB]$ este 2^{20}mm. Se consideră punctele $M_1, M_2, \dots, M_{20}$ pe $[AB]$ astfel: M_1 mijlocul lui $[AB]$, M_2 mijlocul lui $[M_1B]$, M_3 mijlocul lui $[M_2\, B]$, M_4 mijlocul lui $[M_3B]$, ș.a.m. Calculați lungimea segmentului $[M_5M_{19}]$.

Notă: Timp de lucru 2 ore.
Rezolvarea fiecărei probleme este obligatorie.
SUCCES!

Barem de corectare

1. a)	Numerele a, b, c nu pot fi toate impare, pentru că suma este număr par, rezultă că unul dintre ele este 2.	**1 p**
	Caz 1: dacă a =2, obținem $6 + 5b + 11c = 116 \Rightarrow 5b + 11c = 110 \Rightarrow$ b = 11, c = 5.	**1 p**
	Caz 2: dacă b = 2 obținem $3a + 11c = 106$. Deoarece $c < 10\ prim$, găsim singura soluție c = 5, a = 17.	**1 p**
	Caz 3: dacă c = 2 obținem $3a + 5b = 94$. Deoarece $b < 19\ prim$, găsim soluțiile b = 17, a = 3 b = 11, a = 13 b = 5, a = 23.	**1 p**
1. b)	A = $8^n \cdot 5^{3n+1} + 1 = 8^n \cdot 125^n \cdot 5 + 1 = 5 \cdot 1000^n + 1 = \underbrace{500 \ldots 01}_{n+1\ cifre}$, suma cifrelor fiind 6, numărul A este divizibil cu 3, deci nu este prim.	**2 p**
	pentur n = 0, A = 6.	**1 p**
	TOTAL Subiectul 1	**7 p**
2.	Notăm $x - 2013 = a,\ y - 2013 = b,\ \ a \neq 0,\ b \neq 0$	**2 p**
	Ecuația devine: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1,$	**2 p**
	Exprimăm $b = \frac{a}{a-1} \in N \Leftrightarrow b = 1 + \frac{1}{a-1} \in N \Leftrightarrow a - 1 = 1$ a = 2 $\Longrightarrow$ b = 2. Obținem soluția x = 2015, y = 2015.	**3 p**
	TOTAL Subiectul 2	**7 p**
3.	$2^n < 360 \Longrightarrow n \leq 8$, dar $2^8 > 180 \Longrightarrow 2^8$ nu este măsura unui unghi, deci cea mai mare măsură poate fi 2^7.	**3 p**
	$2^7 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^3 = 128 + 128 + 64 + 32 + 8 = 360$	**3 p**
		1 p

	Numărul minim de unghiuri formate în jurul lui O este 5	
	TOTAL Subiectul 3	**7 p**
4.	AB = 2^{20}. M_1 mijlocul lui $[AB]$ $\Longrightarrow$ $M_1B = 2^{20}:2 = 2^{19}$	**2 p**
	M_2 mijlocul lui $[M_1B]$ $\Longrightarrow$ $M_2B = 2^{19}:2 = 2^{18}$	**2 p**
	... M_5 mijlocul lui $[M_4B]$ $\Longrightarrow$ $M_5B = 2^{16}:2 = 2^{15}$	**1 p**
	... M_{19} mijlocul lui $[M_{18}B]$ $\Longrightarrow$ $M_{19}B = 2^2:2 = 2$	**1 p**
	$M_5M_{19} = M_5B - M_{19}B = 2^{15} - 2$.	**1 p**
	TOTAL Subiectul 4	**7 p**

Subiecte propuse de prof. KOCZINGER EVA – Liceul Teologic Romano – Catolic „Ham Janos” Satu Mare