MINISTERUL EDUCAȚIEI

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ 24 mai 2024

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
Clasa a XII–a – Secțiunea H1 – Filieră tehnologică

Subiectul 1.

Fie a∈ℝ fixat și b>0. Pentru $x, y \in [a-b, a+b]$ se definește operația algebrică $x * y = xy - a(x+y) + a^2 + a$.
a) Pentru ce valori ale lui b operația ” $*$ ” este lege de compoziție pe mulțimea $[a-b, a+b]$?
b) Determinați numărul real b pentru care legea de compoziție ” $*$ ” admite element neutru.
c) Pentru b=1 să se determine numerele naturale n pentru care ecuația $\underbrace{x * x * \ldots * x}_{n\ ori} = x$ are trei soluții distincte în mulțimea $[a-b, a+b]$.

SOLUȚIE:
a) $x, y \in [a-b, a+b] \Leftrightarrow |x-a| \le b,\ |y-a| \le b \Leftrightarrow a - b^2 \le x * y \le a + b^2$....................1p
Pune condițiile $a - b \le a - b^2,\ a + b \ge a + b^2$și obține $b \in [0,1]$....................1p
b) Obține $e = a + 1$....................1p
$e = a + 1 \in [a-b, a+b],\ b \in [0,1] \Leftrightarrow b = 1$....................1p
c) Demonstrează prin inducție $\underbrace{x * x * \ldots * x}_{n\ ori} = (x-a)^n + a,\quad n \ge 2$....................1p
Obține $(x-a)((x-a)^{n-1} - 1) = 0$....................1p
Dacă n impar ecuația are soluțiile $a,\ 1+a,\ -1+a$, care convin....................1p

Subiectul 2.

Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X], f = \frac{X^n}{n-1} + \frac{X^{n-1}}{(n-1)(n-2)} + \cdots + \frac{X^2}{2 \cdot 1} - 1$ și $g = X - 1$.
a) Să se arate că f este divizibil cu g și să se determine câtul q al împărțirii polinomului f la g.
b) Arătați că pentru $n \ge 4$ polinomul f nu poate avea toate rădăcinile reale.
c) Dacă $Q: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este funcția polinomială asociată polinomului q, să se arate că $\int_0^1 Q'(x)(x-1)dx > \frac{-n}{n+1}$,pentru orice număr natural nenul n.

SOLUȚIE:
a) $f(1) = \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-3} - \frac{1}{n-2} + \ldots + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - 1 = 0 \Rightarrow X - 1/f$....................1p
Folosind schema lui Horner obține $q = \frac{X^{n-1}}{n-1} + \frac{X^{n-2}}{n-2} + \ldots + \frac{X^2}{2} + \frac{X}{1} + 1$....................1p
b) Scrie $S_1 = -\frac{1}{n-2},\ S_2 = \frac{n-1}{(n-2)(n-3)} \Rightarrow \sum_{k=1}^n x_k^2 = S_1^2 - 2S_2 = \frac{-2n^2+7n-7}{(n-2)^2(n-3)}$....................1p
Arată că $\sum_{k=1}^n x_k^2 = \frac{-2n^2+7n-7}{(n-2)^2(n-3)}$ este număr negativ pentru orice $n \ge 4$, deci nu toate rădăcinile sunt reale....................1p
c) $Q'(x)(x-1) = (x^{n-2} + x^{n-3} + \ldots + x + 1)(x-1) = x^{n-1} - 1$....................1p
Obține $\int_0^1 Q'(x)(x-1)dx = \frac{1-n}{n}$....................1p
$\frac{1-n}{n} > \frac{-n}{n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{n(n+1)} > 0$ adevărată pentru orice număr natural nenul n....................1p

Subiectul 3.

Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numerele $I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx$ și $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n\, x\, dx$.
a) Să se arate că $J_2 < J_1$.
b) Să se verifice egalitatea $4I_0 - 3\pi I_1 = 0$.
c) Demonstrați că $J_{2n} - J_{2n+2} = I_{2n}$ pentru orice număr natural nenul n.

SOLUȚIE:

a) $J_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-cos\,2x}{2} dx = \frac{\pi}{4}$..1p

$J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\, x\, dx = 1\,,\ \frac{\pi}{4} < 1 \Rightarrow J_2 < J_1$, ...1p

b) $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \left(\begin{smallmatrix} x=\cos t \\ dx=-\sin t\, dt\end{smallmatrix}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2 x\, dx = J_2 = \frac{\pi}{4}$ (sau prin părți)..2p

$I_1 = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx = \left(\begin{smallmatrix} 1-x^2=t \\ -2x\, dx=dt\end{smallmatrix}\right) = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{t}\, dt = \frac{1}{3} \Rightarrow 4I_0 - 3\pi I_1 = 0$..1p

c) $J_{2n} - J_{2n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{2n} x\, cos^2 x\, dx$...1p

$J_{2n} - J_{2n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{2n} x \sqrt{1-sin^2 x} \cdot cos\, x\, dx = \int_0^1 t^{2n}\sqrt{1-t^2}dt = I_{2n}$...1p

Subiectul 4.

Un parc are suprafața delimitată de graficele funcțiilor $f, g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 4 - x^2$ și $g(x) = -5$.

a) Determinați coordonatele punctelor de intersecție dintre graficele celor două funcții.

b) Calculați aria parcului.

c) Știind că o alee paralelă cu axa Ox împarte suprafața parcului în două suprafețe de arii egale, să se determine ordonata punctului prin care trece aleea.

SOLUȚIE:

a) Punctele de intersecție dintre graficele funcțiilor:$A(3,-5), B(-3,-5)$..1p

b) $f(x) - g(x) = 9 - x^2 \geq 0, (\forall),\ x \in [-3,3]$...1p

Aria $A = \int_{-3}^{3}(9-x^2)dx = 36$...1p

c) Fie $h(x) = a, a \leq 4 \Rightarrow G_f \cap G_h = \{(-\sqrt{4-a}, a), (\sqrt{4-a}, a)\}$ și $f(x) \geq h(x), (\forall)x \in [-\sqrt{4-a}, \sqrt{4-a}]$.......2p

$A_1 = \int_{-\sqrt{4-a}}^{\sqrt{4-a}}(4-x^2-a)dx = \frac{4}{3}(4-a)\sqrt{4-a}$..1p

$A_1 = \frac{A}{2} \Rightarrow \frac{4}{3}\sqrt{(4-a)^3} = 18 \Leftrightarrow a = 4 - \frac{9}{\sqrt[3]{4}} < 4$..1p

Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.