OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 26 februarie 2016

Clasa a XII-a

1. Se consideră funcţia $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$.

   a) Calculaţi $f'(x),\ x>-1$.

   b) Calculaţi $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+3x}{(x+1)^2\sqrt{x^2+1}}dx$.

Ioana Maşca

2. Arătaţi că mulţimea $G=\{A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})|A^2=I_2,\ \det(A)=1\}$ este un subgrup comutativ al grupului multiplicativ al matricelor pătratice reale nesingulare de ordinul doi.

Cătălin Ciupală

3. Fie $\mathcal{P}$ mulţimea matricelor reale de ordinul 3, care au pe fiecare linie şi pe fiecare coloană un singur element egal cu 1, iar celelalte sunt egale cu 0.

   a) Arătaţi că $\mathcal{P}$ este grup necomutativ în raport cu înmulţirea matricelor.

   b) Calculaţi $S=\sum\limits_{A\in\mathcal{P}}\big(\det(A)\big)^2$.

Gazeta Matematică: Supliment cu Exerciţii, decembrie 2015, enunţ modificat

4. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă şi $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă a funcţiei f. Să se demonstreze că nu există $a,b\in\mathbb{R}^*$, astfel încât $f\big(ax+bF(x)\big)=ax+b,\ \forall\ x\in\mathbb{R}$.

Romeo Ilie

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 26 februarie 2016
Soluţii

Clasa a XII-a

1. Se consideră funcţia $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$.

   a) Calculaţi $f'(x),\ x>-1$.

   b) Calculaţi $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+3x}{(x+1)^2\sqrt{x^2+1}}dx$.

Ioana Maşca

Soluţie.

a) Pentru $x>-1$, avem $f'(x)=\dfrac{x-1}{(x+1)^2\sqrt{x^2+1}}$. **(2p)**

b) Avem

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^2+3x}{(x+1)^2\sqrt{x^2+1}}dx &= \int_0^1 \frac{(x+1)^2+(x-1)}{(x+1)^2\sqrt{x^2+1}}dx \ \textbf{(1p)}\\ &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx+\int_0^1\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}\right)' dx \ \textbf{(2p)}\\ &= \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\Big|_0^1+\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}\Big|_0^1 \ \textbf{(1p)}\\ &= \ln(1+\sqrt{2})+\frac{\sqrt{2}}{2}-1.\ \textbf{(1p)}\end{aligned}$$

2. Arătaţi că mulţimea $G=\{A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})|A^2=I_2,\ \det(A)=1\}$ este un subgrup comutativ al grupului multiplicativ al matricelor pătratice reale nesingulare de ordinul doi.

Cătălin Ciupală

Soluţie. Avem $A^2-Tr(A)A+\det(A)I_2=O_2,\ \forall\ A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. **(1p)**
Pentru $A\in G$, obţinem $2I_2-Tr(A)A=O_2$, deci $\exists\ a\in\mathbb{R}^*$ astfel ca $A=aI_2$. **(3p)**
Din condiţia $\det(A)=1$, obţinem $a=\pm1$. Rezultă $G=\{I_2,-I_2\}$. **(2p)**
În mod elementar, verificăm că $(G,\cdot)$ este grup abelian. **(1p)**

3. Fie $\mathcal{P}$ mulţimea matricelor reale de ordinul 3, care au pe fiecare linie şi pe fiecare coloană un singur element egal cu 1, iar celelalte sunt egale cu 0.

   a) Arătaţi că $\mathcal{P}$ este grup necomutativ în raport cu înmulţirea matricelor.

   b) Calculaţi $S = \sum\limits_{A \in \mathcal{P}} \big(\det(A)\big)^2$.

Gazeta Matematică: Supliment cu Exerciţii, decembrie 2015, enunţ modificat

Soluţie.

a) Fie $(S_3, \circ)$ grupul permutărilor de ordinul 3 şi funcţia $f : S_3 \to \mathcal{P},\ f(\sigma) = A_\sigma$, unde matricea $A_\sigma = \left(a_{ij}^{(\sigma)}\right)_{i,j=\overline{1,3}}$ este definită prin $a_{ij}^{(\sigma)} = \begin{cases} 1, & j = \sigma(i) \\ 0, & j \neq \sigma(i) \end{cases},\ i = \overline{1,3}$.

Funcţia f este corect definită şi bijectivă, deci $\mathcal{P} = \{A_\sigma |\, \sigma \in S_3\}$. **(1p)**

Pentru $A_\sigma \in \mathcal{P}$, avem $\det(A_\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma) \in \{-1, 1\}$. **(1p)**

Fie $A_\sigma, A_\tau \in \mathcal{P}$. Avem $A_\sigma A_\tau = (c_{ij})_{i,j=\overline{1,3}}$, unde

$c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{3} a_{ik}^{(\sigma)} a_{kj}^{(\tau)} = a_{\sigma(i)j}^{(\tau)} = \begin{cases} 1, & j = \tau(\sigma(i)) \\ 0, & j \neq \tau(\sigma(i)) \end{cases} = a_{ij}^{(\tau\circ\sigma)}$. Deci $A_\sigma A_\tau = A_{\tau\circ\sigma} \in \mathcal{P}$.

Astfel $\mathcal{P}$ este parte stabilă finită a grupului multiplicativ al matricelor reale nesingulare de ordinul 3. **(2p)**

Rezultă că $(\mathcal{P}, \cdot)$ este grup. **(1p)**

Cum $(S_3, \circ)$ este grup necomutativ, $(\mathcal{P}, \cdot)$ este de asemenea grup necomutativ. **(1p)**

b) Avem $S = \sum\limits_{\sigma \in S_3} \big(\det(A_\sigma)\big)^2 = \sum\limits_{\sigma \in S_3} 1 = |S_3| = 3! = 6$. **(1p)**

4. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o primitivă a funcţiei f. Să se demonstreze că nu există $a, b \in \mathbb{R}^*$, astfel încât $f\big(ax + bF(x)\big) = ax + b,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Romeo Ilie

Soluţie.

Presupunem, prin absurd, $\exists\ a, b \in \mathbb{R}^*$ a.î. $f\big(ax + bF(x)\big) = ax + b,\ \forall\ x \in \mathbb{R}$.
Considerăm funcţiile $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definite prin $g(x) = ax + bF(x)$ şi $h(x) = ax + b$.
Conform presupunerii, avem $f \circ g = h$. **(1p)**
Funcţia h este bijectivă, deci g este injectivă şi f este surjectivă. **(2p)**
Cum g este continuă şi injectivă, g este strict monotonă pe $\mathbb{R}$. **(1p)**
Dar g este şi derivabilă, cu $g'(x) = a + bf(x),\ x \in \mathbb{R}$. **(1p)**
g fiind strict monotonă, avem $g'(x) \geq 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$ sau $g'(x) \leq 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$. **(1p)**
Deci $a + bf(x) \geq 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$, sau $a + bf(x) \leq 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$. În ambele cazuri f nu este surjectivă. Contradicţie. **(1p)**