INSPECTORATUL SCOLAR JUDEȚEAN GORJ

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

MATE-INFO

FEBRUARIE 2013

CLASA A IX-A

Subiectul I. a) Demonstrați, prin inducție matematică, după numarul de cifre ale numarului n natural, că produsul cifrelor lui, p(n), este mai mic sau cel mult egal cu n .

b) Determinați numărul n dacă p(n) = n^2 - 42 n + 440.

Subiectul II. Triunghiului ABC i se circumscrie cercul cu centrul O şi diametrul său [AA_1] este paralel cu latura[BC]. Fie H ortocentrul triunghiului ABC. Demonstrați că dreapta BC împarte segmentul [OH] în două segmente congruente.

Subiectul III. Demonstrați că :

a) $[x^3+(x+y)^3]\cdot[y^3+(x+y)^3] \le 4\cdot(x+y)^6, \forall x,y \in \mathbf{R}$.

b) Găsiți numerele naturale n pentru care $2^n - 1$ se divide cu 7.

Subiectul IV. Fie ABCDE un pentagon convex şi P ∈ (DE). Notăm G_1, G_2, G_3, G_4 centrele de greutate ale triunghiurilor ADE, APB, ABC şi respectiv APC. Să se arate că $G_1G_2G_3G_4$ este paralelogram dacă şi numai dacă P este mijlocul segmentului (DE).

TIMP DE LUCRU 3 0RE. FIECARE SUBIECT ESTE NOTAT CU 7 PUNCTE

BAREME

CLASA A IX-A

1a) Pentru numerele de o singura cifra exista egalitate. (1pct)

Presupunem ca p(n)$\leq$ n pentru orice numar natural cu mai putin de k cifre si fie n = $\overline{a_1 \ldots\ldots a_k a_{k+1}}$

un numar arbitrar cu k + 1 cifre.

p(n) = $a_1 \cdots\cdots a_k \cdot a_{k+1} \leq 9 \cdot \overline{a_1 \ldots a_k} < 10 \cdot \overline{a_1 \ldots a_k} + a_{k+1}$ = n cctd.(2pct)

b) trebuie n^2 - 42 n + 440 $\leq$ n care conduce la n$\in$ [16, 26].(1pct)

Prin verificari se deduce n $\in$ {18, 20, 24}(3pct)

2. $\overrightarrow{OA_1} = -\overrightarrow{OA}$ (1pct) deci:

$\frac{\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{OA_1}}{2} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}}{2} = \frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}$ (3pct) adica mijlocul segmentului A_1H coincide cu cel al lui BC. (1pct)

Deoarece BC este paralela cu AA_1, atunci linia mijlocie a triunghiului OA_1H este inclusa in dreapta BC(1pct), deci mijlocul lui HO este situat pe BC.(1pct)

3.a) Pentru x, y $\geq$ 0 se face calculul si se verifica(1pct)

Pentru x, y < 0, notam x=-a, y=-b, a,b> 0 si se reduce la cazul precedent.(1pct)

Pentru x> 0 si y < 0 notam x+y =S si x y = P; avem de demonstrat ca

$P^3 + S^3(S^3 - 3SP) \leq 4S^6$ sau $3S^5 + 3S^4P - P^3 \geq 0$; impart prin P^3 (<0) si avem $3u^3 + 3u^2 - 1 \leq 0$ unde

u = $\frac{S^2}{P}$ < 0 ;notam u = -a (a > 0) si avem 3 a^3 - 3a^2 + 1$\geq$ 0 (2pct)adevarata pentru ca a^3 > 0 si 2a^3 + 1 -3a^2 =

$a^3 + a^3 + 1^3 - 3 \cdot a \cdot a \cdot 1$ = (a +a +1)(a^2 +a +a) > 0.(1pct)

b) P(n): $2^n - 1$ =7m, m$\in$ Z

Deoarece $2^{k+3} - 1 = 8\cdot 2^k - 1 = 7.\ 2^k + (2^k - 1)$, avem P(k)⇔P(3)

P(0) adevarata si P(1), P(2) false, deducem ca $n \in \{0, 3, 6, \ldots, 3k, \ldots\}$(2pct)

4. Fie S un punct oarecare din plan. $G_1G_2G_3G_4$ paralelogram ⇔ G_1G_3 si G_2G_4 au acelasi mijloc (1pct)⇔

$\frac{1}{2}(\overline{SG_1} + \overline{SG_3}) = \frac{1}{2}(\overline{SG_2} + \overline{SG_4})$ (1)(1pct); $\overline{SG_1} = \frac{1}{3}(\overline{SA} + \overline{SD} + \overline{SE})$ şi încă trei analoage (4pct)care înlocuite în (1) şi, după reduceri, avem $\frac{1}{2}(\overline{SD} + \overline{SE}) = \overline{SP}$ ⇔ P este mijlocul segmentului (DE).(1pct)