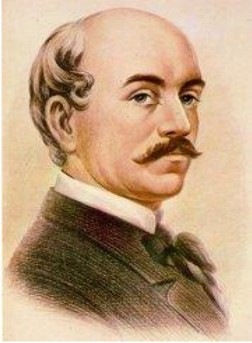


Concursul Euclid este inițiat și organizat de liceul nostru începând cu anul 2000

Liceul Vasile Alecsandri Iasi

Concursul de matematică „Euclid”
Subiect şi barem clasa a VIII-a
12.05.2017

SUBIECTUL I (30 puncte)

Fie $S_n = \sqrt{3-2\sqrt{1\cdot 2}} + \sqrt{5-2\sqrt{2\cdot 3}} + \sqrt{7-2\sqrt{3\cdot 4}} + ... + \sqrt{2n-1-2\sqrt{(n-1)n}}$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Să se aducă S_n la o formă mai simplă.

b) Să se scrie forma generală a lui n pentru care S_n este un număr natural.

Soluţie:

a) Aplică formula $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}$, unde $C = \sqrt{A^2 - B}$ .... 10 p

$S_n = \sqrt{3-2\sqrt{1\cdot 2}} + \sqrt{5-2\sqrt{2\cdot 3}} + \sqrt{7-2\sqrt{3\cdot 4}} + ... + \sqrt{2n-1-2\sqrt{(n-1)n}} =$ .... 10 p
$\sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + ... + \sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \sqrt{n} - 1$

b) S_n este un număr natural, dacă $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$, adică $n = k^2, k \in \mathbb{N}$ .... 10 p

SUBIECTUL II (30 puncte)

Fie $a, b, c > 0$.

a) Folosind, eventual, inegalitatea mediilor, arătaţi că:
$\frac{a}{4a^2+bc} \le \frac{1}{8}(\frac{1}{b} + \frac{1}{c})$.

b) Arătaţi că $\frac{1}{4a^2+bc} + \frac{1}{4b^2+ca} + \frac{1}{4c^2+ab} \le \frac{1}{4}(\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc})$.

Soluţie:

a) $\frac{a}{4a^2+bc} \le \frac{1}{8}(\frac{b+c}{bc})$ .... 5 p

$8abc \le (b+c)(4a^2+bc)$ .... 5 p

$\dfrac{4a^2+bc}{2} \geq \sqrt{4a^2bc} = 2\sqrt{a^2bc}$ .... 3 p

Finalizare .... 2 p

b) $\dfrac{1}{4a^2+bc} \geq \dfrac{1}{8a}(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c})$ etc .... 10 p

Finalizare .... 5 p

SUBIECTUL III (30 puncte)

Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB = 12\,cm$. Pe muchiile $[AA']$, respectiv, $[CC']$, se iau punctele E, respectiv, F, astfel încât $[D'E] \equiv [D'F]$.

a) Dacă $D'E = 12\sqrt{2}\,cm$, să se afle distanţa de la D' la EF.

b) Dacă $D'E = 4\sqrt{13}\,cm$, să se afle forma şi perimetrul secţiunii determinate de planul $(D'EF)$.

Soluţie:

a) E coincide cu A şi F coincide cu C .... 5 p

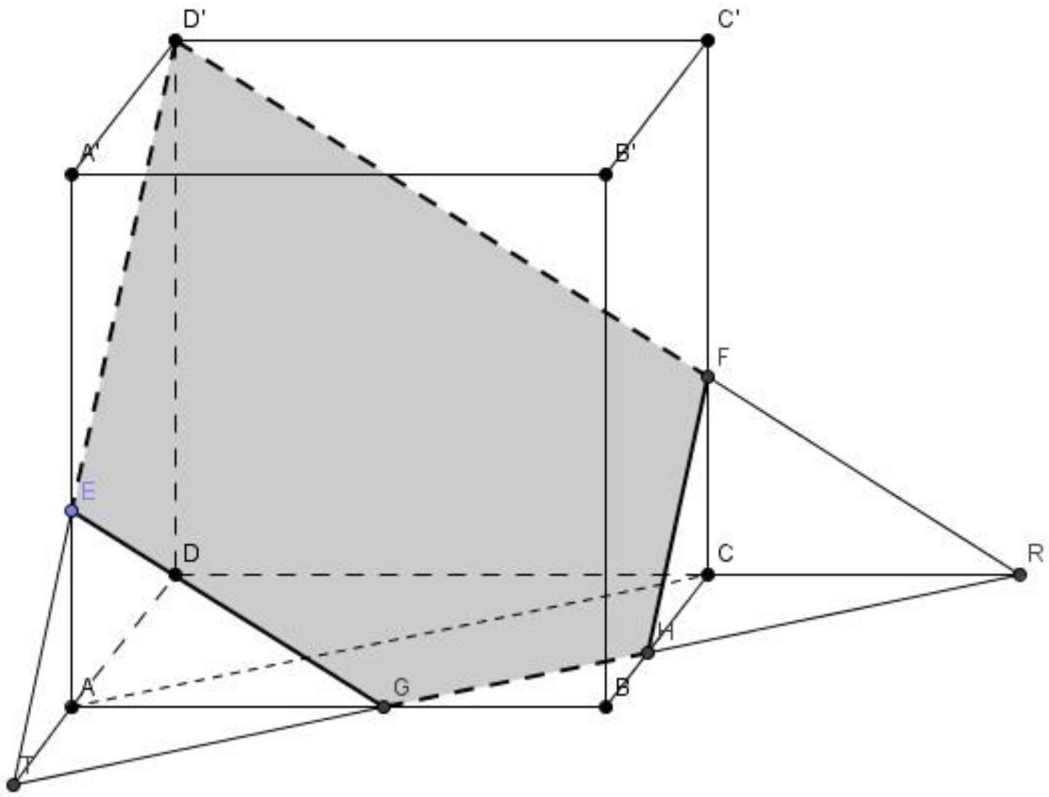
$\Delta D'EC$ e echilateral de latură $12\sqrt{2}cm$ .... 5 p

$d(D',EF) = d(D',AC) = \dfrac{12\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2}cm = 6\sqrt{6}cm$ .... 5 p

b) Calculează $A'E$ şi $C'F$ .... 5 P

Secţiunea este pentagonul $D'EGHF$ .... 5 p

Unde $D'E \cap AD = \{T\}, D'F \cap DC = \{R\}, TR \cap BC = \{H\}, TR \cap AB = \{G\}$



$EG = FH = 2\sqrt{13}cm$ .... 3 p

$P_{D'EGHF} = 12\sqrt{13} + 6\sqrt{2}cm$ .... 2 p

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru: 2 ore.
Se acordă 10 puncte din oficiu.