OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA, 17 februarie 2024
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
CLASA a IX-a

1. (7p) Determinați numerele reale x pentru care $2\{x\}^2 < \{x\}$, cu proprietatea că cel mai apropiat întreg de x este $3x - [x] - 6\{x\} - 1$.

G.M. 6-7-8/2023

Soluție: **a)** Din inegalitatea $2\{x\}^2 < \{x\}$, echivalentă cu $\{x\}(2\{x\}-1) < 0$ și din $0 \le \{x\} < 1$ deducem că $0 < \{x\} < \frac{1}{2}$. Astfel obținem $x = [x] + \{x\} < [x] + \frac{1}{2}$ și rezultă $[x] \le x < [x] + \frac{1}{2} < [x] + 1$.

În aceste condiții cel mai apropiat întreg de x este $[x]$.

Ipoteza se rescrie $3x - [x] - 6\{x\} - 1 = [x] \Leftrightarrow 3([x] + \{x\}) - [x] - 6\{x\} - 1 = [x] \Leftrightarrow [x] - 1 = 3\{x\}$.

Ținând cont de inegalitatea $0 < \{x\} < \frac{1}{2}$, rezultă $0 < 3\{x\} < \frac{3}{2}$, deci $0 < [x] - 1 < \frac{3}{2}$.

Obținem în mod necesar $[x] = 2, \{x\} = \frac{1}{3}$, de unde rezultă $x = \frac{7}{3}$.

Barem:

Deduce $0 < \{x\} < \frac{1}{2}$	2 p
Demonstrează că $[x] \le x < [x] + \frac{1}{2} < [x] + 1$ și cel mai apropiat întreg de x este $[x]$.	2 p
Obține $[x] - 1 = 3\{x\}$	1 p
Finalizare $[x] = 2, \{x\} = \frac{1}{3}$, de unde rezultă $x = \frac{7}{3}$.	2 p

2. (7p) Să se demonstreze inegalitatea $a^2bc + ab^2c + abc^2 \ge 6abc + ab + ac + bc$, pentru orice numere reale a, b, c din intervalul $\left[1+\sqrt{2}, \infty\right)$. Când se obține egalitate?

Dan Popescu, Suceava

Soluție: Din $a \ge \sqrt{2} + 1$ rezultă $(a-1)^2 \ge 2 \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 \ge 2 \Leftrightarrow a^2 \ge 2a + 1$. Prin înmulțirea cu bc a ultimei inegalități obținem $a^2bc \ge 2abc + bc$. În mod analog se obțin inegalitățile $ab^2c \ge 2abc + ac$ și $abc^2 \ge 2abc + ab$. Prin sumarea celor trei inegalități se obține inegalitatea din enunț. Egalitatea se realizează dacă și numai dacă $a = b = c = 1 + \sqrt{2}$.

Barem:

Demonstrează $a^2bc \ge 2abc + bc$ și analoagele și obține inegalitatea cerută	6 p
Egalitatea se realizează dacă și numai dacă $a = b = c = 1 + \sqrt{2}$.	1 p

3. (7p) Arătați că ecuația $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=\frac{3}{z}$ are o infinitate de soluții (x,y,z), cu x,y,z numere naturale impare, distincte două câte două.

Anca Andrei, Suceava

Soluție. Ecuația se scrie în forma echivalentă $z=\frac{3xy}{2x+y}$. Fie d cel mai mare divizor comun al numerelor x și y. Atunci $x=da$, $y=db$, unde $(a,b)=1$, a,b numere impare. Evident că d este și el număr impar. Prin înlocuire obținem că $z=\frac{3abd}{b+2a}$.

Vom arăta că $(ab,b+2a)=1$. Dacă ar exista un număr prim p care să dividă pe ab și pe $b+2a,$ atunci p divide a și p divide b, ceea ce contrazice $(a,b)=1$.

Din $z=\frac{3abd}{b+2a}\in\mathbb{N}\Rightarrow b+2a$ divide $3d$, deci există un $k\in\mathbb{N}$, impar, astfel încât $3d=(b+2a)\cdot k$. Prin calcul $z=kab$, $x=\frac{a(b+2a)k}{3}\in\mathbb{N}$, $y=\frac{b(b+2a)k}{3}\in\mathbb{N}$. Dacă luăm $k=3h$, $h\in\mathbb{N}, h$ impar și $a\neq b$, obținem soluțiile $x=a(b+2a)h$, $y=b(b+2a)h$, $z=3hab$ și $h\in\mathbb{N}$, h impar.

Barem:

$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=\frac{3}{z}\Leftrightarrow z=\frac{3xy}{x+2y}$	1p
Fie d cel mai mare divizor comun al numerelor x și y. Atunci $x=da$, $y=db$, unde $(a,b)=1$, a,b,d numere impare $\Rightarrow z=\frac{3abd}{b+2a}$.	2p
Din $z=\frac{3abd}{b+2a}\in\mathbb{N}\Rightarrow b+2a$ divide $3d$, deci există un $k\in\mathbb{N}$, impar, astfel încât $3d=(b+2a)\cdot k$. Prin calcul $z=kab$, $x=\frac{a(b+2a)k}{3}\in\mathbb{N}$, $y=\frac{b(b+2a)k}{3}\in\mathbb{N}$.	2p
$k=3h$, $h\in\mathbb{N}, h$ impar, $a\neq b$, avem soluțiile $x=a(b+2a)h$, $y=b(b+2a)h$, $z=3hab$	2p

Soluție alternativă:

Observăm că, dacă (x,y,z) este o soluție, atunci $(hx,hy,hz), h\in\mathbb{N}^*$ reprezintă, de asemenea, soluții ale ecuației date. Deoarece $\frac{1}{5}+\frac{2}{15}=\frac{3}{9}$, rezultă că tripletul $(5,15,9)$ este o soluție care satisface cerințele și atunci toate tripletele de forma $(5h,15h,9h), h\in\mathbb{N}$, cu h impar sunt soluții care verifică cerințele, ceea ce încheie demonstrația.

Barem soluție alternativă:

Determinarea unei soluții particulare, de exemplu $(5,15,9)$	3p
Determinarea unui număr infinit de soluții, cum ar fi $(5h,15h,9h), h\in\mathbb{N}$,cu h impar	4p

4. (7p) Fie $ABCD$ un paralelogram și punctele $M\in(AB), N\in(BC), P\in(DC)$ astfel încât $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BN}=\frac{5}{6}\overrightarrow{BC}$ și $\overrightarrow{DP}=\frac{1}{6}\overrightarrow{DC}$. Arătați că centrul de greutate al triunghiului MNP se află pe dreapta AC.

Supliment G.M. 11/2023

Soluție. Fie O centrul paralelogramului $ABCD$. Avem următoarele relații:

$$\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}\quad(1)$$

$$\overrightarrow{BN}=\frac{5}{6}\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OB}=\frac{5}{6}\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{ON}=\frac{1}{6}\overrightarrow{OB}+\frac{5}{6}\overrightarrow{OC}\quad(2)$$

$$\overrightarrow{DP}=\frac{1}{6}\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OD}=\frac{1}{6}\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{OP}=\frac{1}{6}\overrightarrow{OC}+\frac{5}{6}\overrightarrow{OD}\quad(3)$$

Dacă G centrul de greutate al triunghiului MNP, din relația lui Leibniz și relațiile (1), (2) și (3) obținem:

$$3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{OB}+\frac{5}{6}\overrightarrow{OC}+\frac{1}{6}\overrightarrow{OC}+\frac{5}{6}\overrightarrow{OD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{5}{6}\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\frac{5}{6}\overrightarrow{OD}=$$

$=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OA}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$. De aici deduce că vectorii $\overrightarrow{OG}$ și $\overrightarrow{OA}$ sunt coliniari, echivalent cu faptul că punctele O,G,A sunt coliniare. Deoarece O,C,A sunt coliniare, obținem $G\in AC$.

***Barem*:**

Deduce relațiile (1), (2) și (3)	3p
Obține $3\overrightarrow{OG}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$	3p
Finalizare $G\in AC$	1p

Notă: **Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.**