Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală, Iaşi
14.02.2014

CLASA a IX-a

Problema 1.
Fie ABC un triunghi şi punctele M, N, P astfel încât $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MC}$; $\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{NC}$; $\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$ şi Q mijlocul segmentului (PM).

a) Arătați că $\overrightarrow{BN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ şi $\overrightarrow{BQ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{8}\overrightarrow{BA}$;

b) Demonstrați că punctele B, Q, N sunt coliniare şi calculați valoarea raportului $\frac{BQ}{QN}$.

Problema 2.
Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică cu primul termen a_1 şi rația r. Calculați:

a) $S_1=\sum_{k=1}^{n}a_k^2$

b) $S_2=\sum_{k=1}^{n}a_k a_{k+1}$

c) $S_3=\sum_{1\leq k<i\leq n}a_k a_i$

Problema 3.
Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: $\left[\frac{1}{10-x}\right]=\frac{1}{10-[x]}$

Problema 4.
a) Determinați $a_1,a_2,a_3\in\mathbb{N}^*$, $a_1<a_2<a_3$ astfel încât $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}=1$

b) Arătați că $\forall n\geq 3, n\in\mathbb{N}$, există $a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbb{N}^*$, $a_1<a_2<\ldots<a_n$ astfel încât $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}=1$.

Timp de lucru: 3 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa locală, Iaşi

14.02.2014

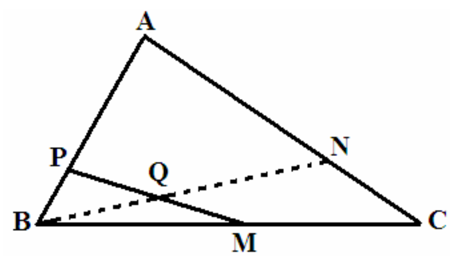
CLASA a IX-a
BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Problema 1.
Fie ABC un triunghi şi punctele M, N, P astfel încât $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MC}$; $\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{NC}$; $\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$ şi Q mijlocul segmentului (PM).

a) Arătaţi că $\overrightarrow{BN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ şi $\overrightarrow{BQ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{8}\overrightarrow{BA}$;

b) Demonstraţi că punctele B, Q, N sunt coliniare şi calculaţi valoarea raportului $\frac{BQ}{QN}$.

Rezolvare:



a) $\overrightarrow{BN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ 2p

$\overrightarrow{BQ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{8}\overrightarrow{BA}$ 2p

b) $\overrightarrow{BQ}=\frac{3}{8}\overrightarrow{BN}\Rightarrow B-Q-N$ coliniare 2p

$\frac{BQ}{BN}=\frac{3}{8}\Rightarrow\frac{BQ}{QN}=\frac{3}{5}$ 1p

Problema 2.
Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică cu primul termen a_1 şi raţia r. Calculaţi:

a) $S_1=\sum_{k=1}^{n}a_k^2$

b) $S_2=\sum_{k=1}^{n} a_k a_{k+1}$

c) $S_3=\sum_{1\le k<i\le n} a_k a_i$

Rezolvare:

a) $S_1=\sum_{k=1}^{n}\left[a_1+(k-1)r\right]^2=\sum_{k=1}^{n}\left[a_1^2+2a_1r(k-1)+(k-1)^2r^2\right]=$

$=na_1^2+\cancel{2}a_1r\dfrac{(n-1)n}{\cancel{2}}+r^2\dfrac{(n-1)n(2n-1)}{6}$ 3p

b) $S_2=\sum_{k=1}^{n} a_k(a_k+r)=\sum_{k=1}^{n}a_k^2+r\sum_{k=1}^{n}a_k=S_1+\dfrac{\left[2a_1+(n-1)r\right]n}{2}r$ 2p

c) $S_1=(a_1+a_2+...+a_n)^2-2(a_1a_2+...+a_{n-1}a_1)\Rightarrow 2S_3=\left[\dfrac{\left[2a_1+(n-1)r\right]n}{2}\right]^2-S_1$

$\Rightarrow S_3=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\left[2a_1+(n-1)r\right]n}{2}\right]^2-\dfrac{S_1}{2}$ 2p

Problema 3.

Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: $\left[\dfrac{1}{10-x}\right]=\dfrac{1}{10-[x]}$

Rezolvare:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{1}{10-[x]}\in\mathbb{Z}\\ [x]\in\mathbb{Z}\end{array}\right\}\Rightarrow 10-[x]\mid 1\Rightarrow 10-[x]\in\{\pm1\}$$ 2p

I. $10-[x]=1\Rightarrow[x]=9\Rightarrow x\in[9,10)$

$\left[\dfrac{1}{10-x}\right]=1\Rightarrow\dfrac{1}{10-x}\in[1,2)\Rightarrow x\in\left[9;\dfrac{19}{2}\right)$ 2p

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro

II. $10-[x]=-1 \Rightarrow [x]=11 \Rightarrow x \in [11,12)$

$\left[\frac{1}{10-x}\right]=-1 \Rightarrow \frac{1}{10-x} \in [-1,0) \Rightarrow x \in [11;12)$ 2p

$x \in \left[9;\frac{19}{2}\right) \cup [11,12)$ 1p

Problema 4.

a) Determinați $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{N}^*, a_1 < a_2 < a_3$ astfel încât $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}=1$

b) Arătați că $\forall n \geq 3, n \in \mathbb{N}$, există $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{N}^*, a_1 < a_2 < ... < a_n$ astfel încât $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}=1$.

Rezolvare:

a) $a_1=2; a_2=3; a_3=6$ 2p

b) Inducție:

$n=3 \Rightarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$

$n=4 \Rightarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}=1$ 2p

Considerăm P(n) adevărată şi demonstrăm P(n + 2) adevărată

Dacă $a_1, a_2, ..., a_n$ verifică relația $\Rightarrow a_1, a_2, ..., a_{n-1}, 2a_n, 3a_n, 6a_n$ verifică relația din P(n + 2).

P(3), P(4) adevărate (+) P(n) $\Rightarrow$ P(n + 2) adevărată $\Rightarrow$ P(n) adevărată $\forall n \geq 3$ 3p