Inspectoratul Şcolar Judeţean Mehedinţi

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ-16 FEBRUARIE 2013
Clasa a VIII-a

SUBIECTUL I

Se dau numerele reale pozitive a, b şi c astfel încât $a+b+c=3$. Să se determine valoarea minimă a sumei $S=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

SUBIECTUL II

Demonstraţi că, pentru orice numere reale a, b, x, y şi z au loc relaţiile:

a) $x^2+2ax+b=(x+a)^2+b-a^2$;

b) $\sqrt{x^2+1006x+1006^2}+\sqrt{y^2+1007y+1007^2}+\sqrt{z^2-2013z+2013^2}>x+y+z$.

SUBIECTUL III

Considerăm tetraedrul $OABC$, în care $OA\perp OB\perp OC\perp OA$ şi M, N, P mijloacele laturilor $[AB], [BC]$ şi respectiv $[CA]$.

Să se arate că:

a) $A^2_{\Delta OMN}+A^2_{\Delta OMP}+A^2_{\Delta ONP}+A^2_{\Delta MNP}=\frac{A^2_{\Delta ABC}}{4}$;

b)Distanţa de la punctul O la planul (MNP) este egală cu distanşa de la punctul M la planul (OPN).

SUBIECTUL IV

Trei feţe ale unui paralelipiped dreptunghic au lungimile diagonalelor direct proporţionale cu numerele $\sqrt{3}$, 2 şi $\sqrt{5}$. Ştiind că lungimea diagonalei paralelipipedului este 6 , aflaţi dimensiunile paralelipipedului.

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 3 ore.
Fiecare subiect este notat de la 0 la 7.

BAREM – clasa a VIII a

① $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)$ 3p

$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$ și analoagele 2p

$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9$ 1p

$S=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 3$ 1p

$S_{min}=3$ se obține pentru $a=b=c=1$ 2p

② a). Calcul direct 1p

b). $\sqrt{x^2+1006x+1006^2}=\sqrt{(x+503)^2+3\cdot 503^2}$ .... 1p+1p

$\Rightarrow \sqrt{x^2+1006x+1006^2}>|x+503|\geq x+503$ 1p

Analoagele: $\sqrt{y^2+1007y+1007^2}>y+\frac{1007}{2}$ 1p

$\sqrt{z^2-2013z+2013^2}>z-\frac{2013}{2}$ 1p

Finalizare 1p

③ a) [OM] mediană în $\Delta AOB \Rightarrow OM=\frac{AB}{2}$ și analog $ON=\frac{BC}{2}, OP=\frac{AC}{2}$ 1p

[MN] linie mijlocie în $\Delta ABC \Rightarrow MN=\frac{AC}{2}$ și analog $MP=\frac{BC}{2}, NP=\frac{AB}{2}$ 1p

$\Rightarrow \Delta OMN\equiv\Delta MOP\equiv\Delta NPO\equiv\Delta PNM$ (LLL) 1p

$\Delta NPM\sim\Delta ABC\Rightarrow \frac{A_{\Delta NPM}}{A_{\Delta ABC}}=\frac{1}{4}$ 1p

$\Rightarrow A_{\Delta OMN}=A_{\Delta MOP}=A_{\Delta NPO}=A_{\Delta PNM}=\frac{A_{\Delta ABC}}{4}$ și relația se verifică 1p

b). Tetraedrul [OMNP] este echifacial (deoarece are toate fețele congruente) și folosim proprietatea cunoscută că distanțele de la vârfuri la fețele opuse sunt congruente 2p

④. $d_1=\sqrt{3}k$, $d_2=2k$, $d_3=\sqrt{5}k$ 1p

$d_1^2=a^2+b^2=3k^2$, $d_2^2=b^2+c^2=4k^2$, $d_3^2=c^2+a^2=5k^2$ 1p

$d_1^2+d_2^2+d_3^2=2d^2\Rightarrow 2d^2=12k^2$ 1p

$k^2=6$ 1p

$a^2+b^2=18\Rightarrow c^2=18\Rightarrow c=3\sqrt{2}$ 1p

$b^2+c^2=24\Rightarrow a^2=12\Rightarrow a=2\sqrt{3}$ 1p

$c^2+a^2=30\Rightarrow b^2=6\Rightarrow b=\sqrt{6}$ 1p