INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEŢEANĂ
9 martie 2013

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiinţele naturii

CLASA A IX-A

1. Pe latura [BC] a triunghiului ABC considerăm punctele D, E, F, în această ordine, astfel încât $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DE}$ şi $\overrightarrow{CF} = 2\overrightarrow{FE}$. Dacă $M \in AB$ şi $N \in AC$ sunt astfel încât $AE \cap MD \cap NF = \{O\}$, arătaţi că dreptele MN şi BC sunt paralele.

2. Fie punctele coliniare A, B, C, D astfel încât AB = BC = CD. Un mobil parcurge distanţele AB, BC, CD cu vitezele constante v_1, v_2, respectiv v_3, diferite între ele. Un al doilea mobil parcurge distanţa AD cu viteza constantă v, care este media aritmetică a vitezelor v_1, v_2 şi v_3. Arătaţi că timpul necesar parcurgerii segmentului AD este mai mare pentru primul mobil decât pentru cel de-al doilea.

3. Determinaţi funcţia $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ pentru care $f(2) = 3$ şi care verifică relaţia:
$\frac{1}{f(1)\cdot f(2)} + \frac{1}{f(2)\cdot f(3)} + \ldots + \frac{1}{f(n)\cdot f(n+1)} = \frac{n}{f(n+1)}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Gazeta Matematică (Supliment)

4. Triunghiul ABC este înscris în cercul de centru O, are ortocentrul H şi centrul de greutate G. Fie A′, B′, C′ punctele diametral opuse punctelor A, B, C în cercul circumscris triunghiului. Dacă ΔA′B′C′ are ortocentrul H′ şi centrul de greutate G′, arătaţi că punctul O este mijloc şi pentru segmentul [HH′] şi pentru segmentul [GG′].

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEŢEANĂ
9 martie 2013

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiinţele naturii

CLASA A X-A

1. Considerăm funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(f(x))=2f(x)+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

a) Aflaţi punctele de pe graficul funcţiei care au abscisa egală cu ordonata.
b) Determinaţi funcţiile bijective cu proprietatea dată.

2. Fie $n\in\mathbb{N}^*$ şi numerele reale a, b, $x_1, x_2, ..., x_n$ din intervalul (0, 1), astfel încât: $b^n \le x_1\cdot x_2\cdot ...\cdot x_n$. Demonstraţi că $(\log_a b)^n \ge \log_a x_1\cdot \log_a x_2\cdot ...\cdot \log_a x_n$.

Gazeta Matematică

3. a) Dacă $z\in\mathbb{C}$, demonstraţi că $z^2+\overline{z}^2\le 2|z|^2$.

b) Fie a, b, c, d patru numere complexe astfel încât:

$$a^2+\overline{b}^2=2|c|^2,\ b^2+\overline{c}^2=2|d|^2,\ c^2+\overline{d}^2=2|a|^2 \text{ şi } d^2+\overline{a}^2=2|b|^2.$$

Demonstraţi că există $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_2, \varepsilon_4\in\{-1, 1\}$ pentru care $\varepsilon_1\cdot a+\varepsilon_2\cdot b+\varepsilon_3\cdot c+\varepsilon_1\cdot d = 0$.

4. Pe tastatura unui telefon celular, cifrele 1, 2, ..., 9 sunt aranjate în cele nouă căsuţe ale unui pătrat 3×3. Plecând de la o cifră oarecare de pe tastatură, Lucian-Georges formează numere de cinci cifre nenule, astfel încât căsuţa fiecărei cifre a numărului (începând cu cea de-a doua) să aibă un singur vârf în comun cu căsuţa cifrei precedente a numărului; el poate reveni de mai multe ori la aceeaşi cifră.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

a) Câte numere care să conţină atât cifre pare, cât şi cifre impare, se pot forma?
b) Câte numere care conţin numai cifre pare se pot forma?
c) Câte numere care conţin numai cifre impare se pot forma?

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEŢEANĂ
9 martie 2013

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiinţele naturii

CLASA A XI-A

1. Dacă $n \in \mathbb{N}$, calculaţi $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1^x+2^x+...+n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Gazeta Matematică (Supliment)

2. Cătalin, membru în Armata Ultra, doreşte să ofere fiecărui suporter al echipei Steaua prezent la un meci desfăşurat pe Arena Naţională (care are 60000 locuri şi este, desigur, plină) câte un banner matriceal având forma din figura 1. Cătălin intenţionează să coloreze fiecare dintre cele 16 pătrăţele din matrice fie cu roşu, fie cu albastru.

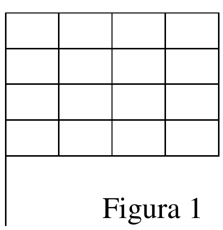

Figura 1

a) Poate să ofere Cătălin fiecărui suporter din stadion câte un banner colorat în mod diferit?

b) Care este numărul maxim de bannere distincte care pot fi colorate simetric în raport cu diagonala principală? (un exemplu de banner simetric în raport cu diagonala principală este prezentat în figura nr. 2).

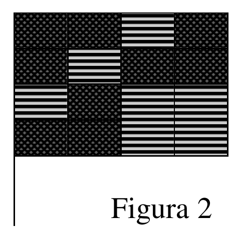

Figura 2

3. a) Găsiţi o matrice $A \in M(\mathbb{Z})$ astfel încât, dacă împărţim numărul detA la 4, obţinem restul 1.

b) Indicaţi o matrice $B \in M_3(\mathbb{Z})$ cu proprietatea că detB se divide cu 4.

c) Fie $T = \begin{pmatrix} 2011 & 2013 & 2015 \\ 2013 & 2009 & 2013 \\ 2017 & 2013 & 2019 \end{pmatrix}$. Aflaţi restul împărţirii prin 4 a numărului detT.

4. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea că $f(x + y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Demonstraţi că funcţia f este strict crescătoare dacă şi numai dacă $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
9 martie 2013

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiințele naturii

CLASA A XII-A

1. Pe mulțimea M = {Poli Iaşi, Steaua, Oțelul, Rapid, UTA} definim legea de compoziție * astfel:

*	Poli Iaşi	Steaua	Oțelul	Rapid	UTA
Poli Iaşi	Poli Iaşi	Steaua	Steaua	Steaua	Poli Iaşi
Steaua	Steaua	Steaua	Steaua	Steaua	Steaua
Oțelul	Poli Iaşi	Steaua	Poli Iaşi	Poli Iaşi	Oțelul
Rapid	Oțelul	Steaua	Oțelul	Poli Iaşi	Rapid
UTA	Poli Iaşi	Steaua	Oțelul	Rapid	UTA

a) Precizați dacă legea * admite element neutru şi în caz că există, identificați-l .
b) Spunem că elementul $d \in M$ este *element destroyer* dacă $d*x = x*d = d$, $\forall x \in M$.
Admite legea de compoziție descrisă mai sus element destroyer?
c) Pe mulțimea M dată mai sus, câte legi de compoziție se pot defini (numărând-o şi pe cea deja definită)? Câte dintre acestea sunt comutative ?

2. Pe mulțimea numerelor întregi $\mathbb{Z}$, considerăm legea de compoziție * definită prin:

$$x * y = 5xy + 5x + 5y + 4, \forall x, y \in \mathbb{Z}.$$

a) Justificați asociativitatea legii *.
b) Cercetați existența elementului neutru.
c) Calculați ultimele 2000 cifre ale numărului 1*2*3*4* ... * 2012*2013.

3. Determinați primitivele funcției $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^{2013}+x^{1006}}{\left(x^{1007}+2\right)^{2013}}$.

4. Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ o funcție care admite primitive şi F o primitivă a sa cu F(1) = 0. Arătați că există $c\in(0, 1)$ astfel încât $(c + 1)F(c) + cf(c) = 0$.

Gazeta Matematică (Supliment)

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*