OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 15.02.2015

Clasa a VI-a

SUBIECTUL 1.

Determinaţi numerele prime a,b,c cu proprietatea : $27a+145b+15c=2015$.

SUBIECTUL 2.

a) Determinaţi numerele naturale $n\in\mathbf{N}^*$ şi $\overline{abcd}$ scrise în baza 10, ştiind că $\overline{\text{abcd}}+\frac{\overline{\text{abcd}}}{6}+\frac{\overline{\text{abcd}}}{6^2}+...+\frac{\overline{\text{abcd}}}{6^n}=\frac{6^{n+1}-1}{5}$.

G.M. nr. 10/2014

b) Arătaţi că numărul $A=2016^{2015}+2014^{2015}$ are cel puțin 3 divizori numere prime.

SUBIECTUL 3.

O,A,B,C sunt puncte coliniare în această ordine, $OA=2^x$ cm, $OB=2^{x+1}$ cm, $OC=2^{x+2}$ cm, $x\in\mathbf{N}^*$.

a) Arătaţi că $BC=OA+AB$;

b) Dacă M este mijlocul segmentului $[OA]$ şi N este mijlocul segmentului $[BC]$, iar $MN=20$ cm, aflaţi lungimea segmentului $[AC]$.

SUBIECTUL 4.

Unghiurile $A\hat{O}B$ şi $B\hat{O}E$ sunt adiacente suplementare , $C,D\in Int(B\hat{O}E)$, $D\in Int(C\hat{O}E)$. Dacă unghiurile $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$, $C\hat{O}D$ și $D\hat{O}E$ sunt ascuţite, au măsurile exprimate prin numere naturale şi $m\left(A\hat{O}B\right)=\frac{2}{3}m\left(B\hat{O}C\right)=\frac{2}{15}m\left(C\hat{O}D\right)$, aflaţi măsurile unghiurilor $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$, $C\hat{O}D$ şi $D\hat{O}E$.

Notă:
Timp de lucru: 2 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.
Nu se acordă puncte din oficiu.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 15.02.2015

Clasa a VI-a

Barem de corectare şi notare

Subiectul 1.

$5|145b$, $5|15c$, $5|2015 \Rightarrow 5|27a$, $5\nmid 27 \Rightarrow 5|a$, a prim $\Rightarrow a=5$ ***2p***

$29b+3c=376 \Rightarrow b<13$, b prim $\Rightarrow b\in\{2,3,5,7,11\}$ ***2p***

Verificarea că pentru $b\in\{2,3,5,7\}$ nu se obţin soluţii convenabile ***2p***

$b=11 \Rightarrow c=19$. Soluţie finală: $a=5$, $b=11$, $c=19$ ***1p***

Subiectul 2.

a) $\overline{abcd}+\dfrac{\overline{abcd}}{6}+\dfrac{\overline{abcd}}{6^2}+...+\dfrac{\overline{abcd}}{6^n}=\overline{abcd}\cdot\left(1+\dfrac{1}{6}++\dfrac{1}{6^2}+...+\dfrac{1}{6^n}\right)$ ***1p***

$1+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6^2}+...+\dfrac{1}{6^n}=\dfrac{6^{n+1}-1}{5\cdot 6^n}$ ***1p***

$\dfrac{\overline{abcd}}{6^n}=1 \Rightarrow \overline{abcd}=6^n$ ***1p***

$n\in\{4;5\}$, $\overline{abcd}\in\{1296;7776\}$ ***1p***

b) $2016^{2015}=(2015+1)^{2015}=M_{2015}+1^{2015}=M_{2015}+1$

$2014^{2015}=(2015-1)^{2015}=M_{2015}-1^{2015}=M_{2015}-1$ ***1p***

$A=M_{2015}+1+M_{2015}-1=M_{2015}=2015\cdot k$, $k\in\mathbf{N}^*$ ***1p***

$2015=5\cdot 13\cdot 31 \Rightarrow A=5\cdot 13\cdot 31\cdot k$, $k\in\mathbf{N}^*$, deci A are cel puţin 3 divizori numere prime. ***1p***

Subiectul 3.

a) $OA+AB=OB=2^{x+1}$ (sau $OB=2\cdot OA$, $OC=4\cdot OA$) ***1p***

$BC=OC-OB=2^{x+2}-2^{x+1}=2^{x+1}=OA+AB$ ($BC=OB=OA+AB$) ***1p***

a) $MN=2^{x+1}+2^{x-1}$ (sau $MN=\dfrac{5}{2}\cdot OA$) ***2p***

$x=3\,\text{cm}$ ***2p***

$AC=24\,\text{cm}$ ***1p***

Subiectul 4.

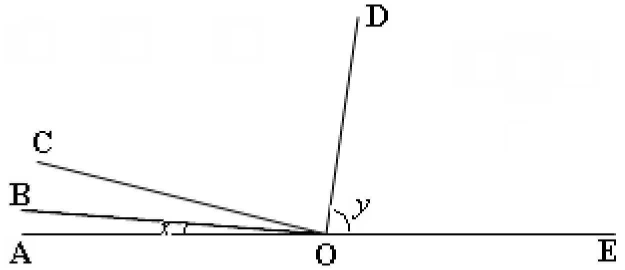
Notăm $m(\widehat{AOB})=x$, $m(\widehat{DOE})=y \Rightarrow x+\dfrac{3}{2}x+\dfrac{15}{2}x+y=180^0$ .... ***2 p***

$\dfrac{15}{2}x<90^0 \Rightarrow x<12^0$ *(1)*.. ***1 p***

$y=180^0-10x<90^0 \Rightarrow x>9^0$ *(2)*... ***2 p***

$(1)+(2) \Rightarrow m(\widehat{AOB})\in\{10^0;11^0\}$, $m(\widehat{BOC})\in\{15^0;16^030'\}$, $m(\widehat{COD})\in\{75^0;82^030'\}$, $m(\widehat{DOE})\in\{80^0;70^0\}$
.... ***1 p***

Măsurile sunt numere naturale $\Rightarrow m(\widehat{AOB})=10^0$, $m(\widehat{BOC})=15^0$, $m(\widehat{COD})=75^0$, $m(\widehat{DOE})=80^0$ ... ***1 p***



Notă : Orice altă soluţie corectă, diferită de cea din barem, va primi punctaj maxim .