MINISTERUL EDUCAȚIEI

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA

Al patrulea baraj de selecție pentru OBMJ
București, 29 mai 2022

Problema 1.

Arătați că, pentru orice număr natural prim p, există numerele naturale x, y, z și t, nu toate nule, astfel încât $t < p$ și
$$x^2 + y^2 + z^2 = tp.$$

Problema 2.

În triunghiul scalen ascuțitunghic ABC se notează cu D piciorul bisectoarei din A și cu E piciorul înălțimii din A. Mediatoarea segmentului AD intersectează semicercurile de diametre AB și AC, construite în exteriorul triunghiului ABC, în X, respectiv Y. Demonstrați că punctele X, Y, D și E sunt conciclice.

Problema 3.

Aflați toate perechile de numere naturale (a, b) pentru care numărul $\dfrac{(a+b)^2}{4+4a(a-b)^2}$ este întreg.

Problema 4.

Spunem despre un număr natural că este *rotund*, dacă numărul divizorilor săi este pătrat perfect. Pentru un număr natural rotund n cu d^2 divizori construim un tablou $d \times d$ și completăm celulele acestuia cu divizorii lui n. La fiecare pas, putem alege un rând al tabloului și muta divizorul de pe coloana 1 pe coloana 2, cel de pe coloana 2 pe coloana 3,..., cel de pe coloana d pe coloana 1. Oricare configurație a tabloului la care ajungem este numită *fezabilă* dacă există o coloană ce are elementele $a_1, a_2, \ldots, a_d$ în această ordine și $a_1 \mid a_2 \mid \ldots \mid a_d$ sau $a_d \mid a_{d-1} \mid \ldots \mid a_1$.

Determinați numerele rotunde $n \geqslant 2$ pentru care, oricum am completa inițial tabloul divizorilor săi, există o configurație fezabilă la care putem ajunge după un număr finit de pași.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.