

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA, 17 februarie 2024

CLASA a VIII-a

1. a) (3p) Determinați valoarea minimă a expresiei $x^2 + 3x + \frac{41}{4}$, oricare ar fi x număr real.

b) (4p) Dacă x este număr real, arătați că $\frac{1}{x^2 + 3x + \frac{41}{4}} + \frac{1}{x^2 + x + 3} + \frac{1}{x^2 + 4x + 27} < \frac{1077}{2024}$.

2. (7p) Fie $a, b, c \in \mathbb{Z}$ și $x = 2024^{a+b-2c}$, $y = 2024^{b+c-2a}$, $z = 2024^{c+a-2b}$. Demonstrați că:

$$\sqrt{\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx}} = 1.$$

3. (7p) Se consideră cubul $ABCD A'B'C'D'$, centrul O al feței $ABCD$, iar punctele M și N sunt mijloacele muchiilor AB , respectiv BC . Arătați că dreptele $D'B$, $A'N$, $C'M$ și $B'O$ sunt concurente.

4. Pe planul rombului $ABCD$, cu $AC = 8\sqrt{3}$ cm și $\sphericalangle ABC = 120^\circ$, se ridică perpendicularele BM și DN , situate de o parte și de alta a planului (ABC) , $BM = 6$ cm și $DN = 8$ cm.

(3p) a) Arătați că AC este perpendiculară pe planul (MON) , unde O este punctul de intersecție al diagonalelor rombului $ABCD$.

(4p) b) Calculați sinusul unghiului determinat de dreptele MC și AN .

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.

2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.

3. Timp de lucru 3 ore.