Concursul Interjudeţean de Matematică „Teodor Topan”, Ediţia a XV-a
Şimleu Silvaniei, 17 decembrie 2022

Clasa a VIII-a

1) Aflaţi numerele prime p, q pentru care numărul $p^2 + q^2 + 3pq$ este pătrat perfect.

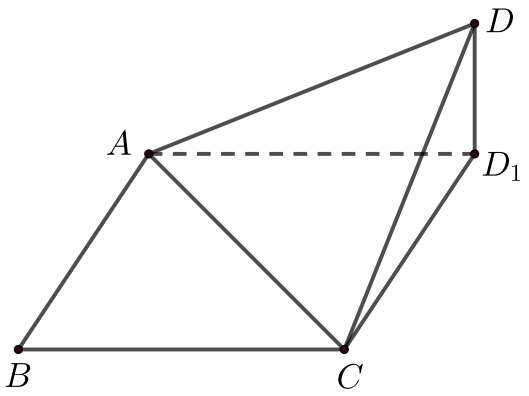
Mihaela Berindeanu, Supliment Gazeta Matematică nr. 9/2022, problema S:E22.232

Soluţie şi barem de corectare

Dacă p şi q sunt numere cu proprietatea din enunţ, fie $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $p^2+q^2+3pq = n^2$. Atunci $(p+q)^2 + pq = n^2$, deci $pq = n^2 - (p+q)^2 = (n-p-q)(n+p+q)$. ... **2p**
Aşadar $n+p+q$ este un divizor al lui pq. Deoarece singurii divizori naturali ai lui pq sunt $1, p, q, pq$, iar $n+p+q > p$ şi $n+p+q > q$, deducem că $n+p+q = pq$, deci $n-p-q = 1$. **2p**
Obţinem $pq - 1 = 2p + 2q$, care se scrie $(p-2)(q-2) = 5$. **2p**
Cum $p, q \geq 2$, singura posibilitate este $\{p-2, q-2\} = \{1, 5\}$, adică $\{p, q\} = \{3, 7\}$, numere care verifică într-adevăr toate condiţiile din enunţ. **1p**

2) Fie A, B, C, D patru puncte în spaţiu.
a) Dacă $AB = BC = CD = DA$, rezultă că $ABCD$ este romb?
b) Dacă $AB \perp BC$, $BC \perp CD$, $CD \perp DA$ şi $DA \perp AB$, rezultă că $ABCD$ este dreptunghi?

Soluţie
a) Nu rezultă. De exemplu, se pot considera două triunghiuri isoscele congruente, cu baza comună, situate în plane diferite.



b) DA. Evident, dacă punctele sunt coplanare atunci $ABCD$ ar fi dreptunghi. În continuare vom demonstra că într-adevăr, dacă $AB \perp BC$, $BC \perp CD$, $CD \perp DA$ şi $DA \perp AB$ atunci punctele A, B, C, D sunt coplanare.

În caz contrar, notând cu D_1 proiecţia lui D pe planul (ABC) rezultă că dreapta AB este perpendiculară pe planul (DAD_1) (este perpendiculară pe AD şi pe DD_1), deci $AB \perp D_1A$ şi la fel $BC \perp D_1C$ şi cum $AB \perp BC$, $ABCD_1$ este dreptunghi. Acum putem ajunge uşor la o contradicţie: în triedrul tridreptunghic D_1DAC avem $DA^2 + DC^2 = DD_1^2 + AD_1^2 + DD_1^2 + D_1C^2 = AD_1^2 + CD_1^2 + 2DD_1^2 = AC^2 + 2DD_1^2$, deci CD nu este perpendiculară pe DA, în contradicţie cu ipoteza. Contradicţia la care am ajuns provine din faptul că am presupus că punctele A, B, C, D nu sunt coplanare. Aşadar A, B, C, D sunt coplanare, ceea ce ne-am propus să arătăm.

Altă soluţie pentru b)

b) Da, rezultă. Fie α planul care trece prin C şi e perpendicular pe BC şi β planul perpendicular în A pe AB. Deoarece $AB \parallel \alpha$, $BC \parallel \beta$ şi $AB \perp BC$, cele două plane sunt perpendiculare şi se taie după o dreaptă d. Din $AB \perp \beta$ şi $d \subset \beta$ rezultă $AB \perp d$. Analog rezultă $BC \perp d$, deci $d \perp (ABC)$. Punctul D trebuie să se afle pe d şi să verifice, în plus, că $ADC = 90°$. Fie D_1 intersecţia dintre d şi (ABC). Atunci $AC^2 = AD^2 + DC^2 = AD_1^2 + D_1D^2 + CD_1^2 + D_1D^2 = AC^2 + 2DD_1^2$, deci $D = D_1$, adică D e al patrulea vârf al dreptunghiului.

Barem de corectare

a) **2p**
b) Consideră punctul D_1 pentru care $ABCD_1$ este dreptunghi. **1p**
Arată că $DD_1 \perp (ABC)$. **2p**
Foloseşte teorema lui Pitagora şi ipoteza pentru a arăta că $D_1 = D$. **2p**

3) a) Demonstraţi că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ are loc inegalitatea

$$\frac{(2n)!}{(n+1)! \cdot (n+2)!} < \frac{(2(n+1))!}{(n+2)! \cdot (n+3)!}.$$

b) Aflaţi numerele naturale nenule n cu proprietatea $(n+1)! \cdot (n+2)! = (2n)!$.

Andrei Eckstein

Soluţie şi barem de corectare

a) Inegalitatea de demonstrat se scrie

$$\frac{(2n)!}{(n+1)! \cdot (n+2)!} < \frac{(2n)! \cdot (2n+1) \cdot (2n+2)}{(n+1)! \cdot (n+2) \cdot (n+2)! \cdot (n+3)},$$

adică $(n+2)(n+3) < (2n+1)(2n+2)$. Ultima inegalitate rezultă din înmulţirea inegalităţilor $n+2 < 2n+1$ şi $n+3 < 2n+2$, adevărate pentru orice $n \geq 2$.
Alternativ, se pot face calculele; inegalitatea revine la $n^2+5n+6 < 4n^2+6n+2$, adică la $4 < n^3+n$, inegalitate evidentă pentru orice $n \geq 2$. **2p**
b) Prin calcul direct se constată că pentru $n \in \{1,2,3,4\}$ nu avem egalitate, dar pentru $n = 5$ avem. Într-adevăr, $6! \cdot 7! = 10!$ este echivalentă cu $6! = 8 \cdot 9 \cdot 10$, adică $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720 = 8 \cdot 9 \cdot 10$. **1p**
Folosind inegalitatea de la a), pe rând, pentru $n = 5, 6, 7, \ldots$ constatăm că $1 = \frac{10!}{6! \cdot 7!} < \frac{11!}{7! \cdot 8!} < \frac{12!}{8! \cdot 9!} < \ldots$, ceea ce arată că pentru $n > 5$ vom avea $(n+1)! \cdot (n+2)! < (2n)!$, prin urmare $n = 5$ este singura soluţie a ecuaţiei. **4p**

4) Se consideră patrulaterul convex $ABCD$. Notăm cu O punctul de intersecţie a diagonalelor şi cu $S(ABC)$, $S(ADC)$ respectiv ariile triunghiurilor ABC şi ADC.

a) Demonstraţi că O este mijlocul lui $[BD]$ dacă şi numai dacă $S(ABC) = S(ADC)$.

b) Fie

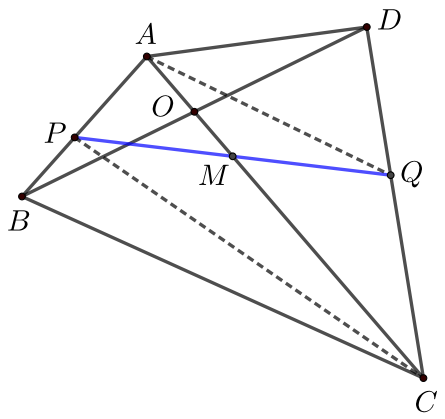
$$\mathcal{M} = \left\{ [PQ] \;\middle|\; P \in (AB],\ Q \in (CD] \text{ şi } \frac{AP}{AB} = \frac{CQ}{CD} \right\}.$$

Demonstraţi că dacă mijlocul unuia dintre segmentele mulţimii $\mathcal{M}$ aparţine diagonalei $[AC]$, atunci mijlocul oricărui segment din mulţimea $\mathcal{M}$ aparţine diagonalei $[AC]$.

Dorel Miheţ

Soluţie şi barem de corectare

a) Triunghiurile ABC şi ADC au latura $[AC]$ comună, deci $S(ABC) = S(ADC)$ dacă şi numai dacă înălţimile corespunzătoare acestei laturi sunt egale, adică dacă şi numai dacă $BB_1 = DD_1$ unde B_1 şi D_1 sunt proiecţiile punctelor B şi D pe AC. Însă $BB_1 = DD_1 \Leftrightarrow \triangle DOD_1 \equiv \triangle BOB_1 \Leftrightarrow DO = BO$ (dacă $B_1 \neq D_1$), iar dacă $B_1 = D_1\,(= O)$ atunci evident $BB_1 = DD_1 \Leftrightarrow BO = DO$. **2p**



b) Un element special al mulţimii $\mathcal{M}$ este diagonala $[BD]$. Punctul comun al diagonalelor $[BD]$ şi $[AC]$ este O, deci mijlocul lui $[BD]$ aparţine diagonalei $[AC]$ dacă şi numai dacă O este mijlocul lui $[BD]$ deci, conform punctului a), dacă şi numai dacă $S(ABC) = S(ADC)$. În continuare vom demonstra că toate segmentele din $\mathcal{M}$ au această proprietate, adică punctul de intersecţie dintre un segment arbitrar din $\mathcal{M}$ şi diagonala $[AC]$ este mijlocul acestui segment dacă şi numai dacă are loc egalitatea $S(ABC) = S(ADC)$.

Într-adevăr, fie $[PQ]$ un segment din $\mathcal{M}$ şi M punctul de intersecţie dintre $[PQ]$ şi diagonala $[AC]$. Aplicând rezultatul de la a) patrulaterului $APCQ$ rezultă că M este mijlocul lui $[PQ]$ dacă şi numai dacă $S(APC) = S(AQC)$. **2p**
Însă din egalităţile:

$$\frac{S(APC)}{S(ABC)} = \frac{AP}{AB} = \frac{CQ}{CD} = \frac{S(AQC)}{S(ADC)}$$

rezultă că $S(APC) = S(AQC)$ dacă şi numai dacă $S(ABC) = S(ADC)$. **2p**

Acum concluzia problemei rezultă imediat: dacă mijlocul unui segment oarecare din $\mathcal{M}$ aparţine diagonalei $[AC]$ atunci $S(ABC) = S(ADC)$, deci intersecţia dintre un segment arbitrar $[PQ] \in \mathcal{M}$ şi $[AC]$ este mijlocul M al lui $[PQ]$. **1p**