Olimpiada Națională de Matematică 2016

Etapa locală – Iași, 1 februarie 2016

CLASA A VII- A

Problema 1. Aflați numerele naturale nenule *n*, astfel încât $\sqrt{n!+3} \in \mathbb{Q}$, unde $n!=1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n$.

Problema 2. Trei copii se joacă cu numere, în 2017 pași, astfel: la pasul 1 fiecare dintre ei are în mână un cartonaș pe care este scris un număr rațional pozitiv care nu este număr natural și astfel încât suma numerelor de pe cele trei cartonașe să fie număr natural. La pasul k fiecare dintre ei își pune cartonașul la spate și-l înlocuiește cu un altul pe care este scris numărul ce reprezintă suma numerelor celorlalți doi, de la pasul $k-1$, unde $2 \le k \le 2017$. Demonstrați că:

a) la fiecare pas, suma numerelor aflate pe cartonașele din mâinile lor este număr natural;

b) la fiecare pas, numărul aflat pe cartonașul din mâna fiecărui copil nu este natural;

c) la pasul 2017, suma tuturor numerelor aflate pe cartonașele din spatele fiecărui jucător este aceeași, un număr natural divizibil cu 17.

Problema 3. În pătratul ABCD se ia punctul M∈(BC), astfel încât $\frac{BM}{BC}=\frac{1}{4}$. Dreapta DM intersectează pe AC în Q și prelungirea lui (AB) în P. Aflați valoarea raportului $\frac{QM}{DP}$.

Problema 4. Romburile $ABCD$ și $DEFG$ au un singur punct comun, $(AB)\equiv(DE)$, $\measuredangle ABC \equiv \measuredangle DEF$, iar punctele *B*, *D* și *F* sunt coliniare. Demonstrați că:

a) $m(\measuredangle ADG)=90^\circ$;

b) mijlocul segmentului $[BF]$ este punctul *L*, unde $\{L\}=AE\cap CG$;

c) $BF \le 2\sqrt{2}\cdot AB$.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Olimpiada Naţională de Matematică 2016

Etapa locală – Iaşi, 1 februarie 2016

CLASA A VII- A

Problema 1. Aflaţi numerele naturale nenule n, astfel încât $\sqrt{n!+3} \in \mathbb{Q}$, unde $n! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n$.

Soluţie şi barem:

Pentru n=1, se obţine $\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2\in\mathbb{Q}$ 1p

Pentru n=3, se obţine $\sqrt{1\cdot 2\cdot 3+3}=\sqrt{9}=3\in\mathbb{Q}$ 1p

Pentru n=2,4,5, se obţine $\sqrt{n!+3}\notin\mathbb{Q}$ 1p

Pentru n≥6, se obţine $\sqrt{n!+3}=\sqrt{3(1\cdot 2\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot \ldots n+1)}$ 2p

$1\cdot 2\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot \ldots n+1\in M_3+1$, deci $3(1\cdot 2\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot \ldots n+1)$ este multiplu de 3 fǎra a fi multiplu de 9, şi nu este pǎtrat perfect, aşadar $\sqrt{n!+3}\notin\mathbb{Q}$ 2p

Problema 2. Trei copii se joacă cu numere, în 2017 paşi, astfel: la pasul 1 fiecare dintre ei are în mână un cartonaş pe care este scris un număr raţional pozitiv care nu este număr natural şi astfel încât suma numerelor de pe cele trei cartonaşe să fie număr natural. La pasul k fiecare dintre ei îşi pune cartonaşul la spate şi-l înlocuieşte cu un altul pe care este scris numărul ce reprezintă suma numerelor celorlalţi doi, de la pasul $k-1$, unde $2\le k\le 2017$. Demonstraţi că:

a) la fiecare pas, suma numerelor aflate pe cartonaşele din mâinile lor este număr natural;
b) la fiecare pas, numărul aflat pe cartonaşul din mâna fiecărui copil nu este natural;
c) la pasul 2017, suma tuturor numerelor aflate pe cartonaşele din spatele fiecărui jucător este aceeaşi, un număr natural divizibil cu 17.

Claudiu-Ştefan Popa

Soluţie şi barem:

a) Notăm cu a_1, b_1 şi c_1 numerele raţionale pozitive care nu sunt numere raţionale aflate pe cartonaşele ţinute în mână de cei trei copii. $a_1+b_1+c_1=s\in\mathbb{N}$

La pasul 2, $a_2=b_1+c_1$, $b_2=a_1+c_1$, $c_2=a_1+b_1$ şi $a_2+b_2+c_2=2\cdot(a_1+b_1+c_1)=2s\in\mathbb{N}$

..........1p

La pasul k, $2 < k \le 2017$,

$a_k + b_k + c_k = 2\cdot(a_{k-1} + b_{k-1} + c_{k-1}) = 2^2\cdot(a_{k-2} + b_{k-2} + c_{k-2}) = ... = 2^{k-1}\cdot s \in \mathbb{N}$ **1p**

b) Să presupunem, prin reducere la absurd, că $a_2 \in \mathbb{N} \Leftrightarrow b_1 + c_1 \in \mathbb{N}$; prin urmare $a_1 + (b_1 + c_1) = s \notin \mathbb{N}$, ceea ce este fals. Rămâne că $a_2 \notin \mathbb{N}$. Similar se arată că b_2 şi c_2 nu sunt numere naturale........................**1p**

Să presupunem, prin reducere la absurd, că $a_3 \in \mathbb{N} \Leftrightarrow b_2 + c_2 \in \mathbb{N} \Rightarrow a_2 + (b_2 + c_2) = 2^2 s \notin \mathbb{N}$, ceea ce este fals. Rămâne că $a_3 \notin \mathbb{N}$ şi, la fel, b_3 şi c_3 nu sunt numere naturale.

Mai departe, pas cu pas, se arată, la fel, că a_k, b_k şi c_k nu sunt numere naturale, $2 < k \le 2017$

........................**1p**

c) La pasul 2017, la spatele unui copil se află cartonaşele cu numerele $a_1, a_2, ..., a_{2016}$, în spatele altuia cele cu numerele $b_1, b_2, ..., b_{2016}$ şi în spatele celui de-al treilea cele cu numerele $c_1, c_2, ..., c_{2016}$.

$(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + ... + (a_{2015} + a_{2016}) = (b_1 + b_2) + (b_3 + b_4) + ... + (b_{2015} + b_{2016}) =$

$(c_1 + c_2) + (c_3 + c_4) + ... + (c_{2015} + c_{2016}) = (a_1 + b_1 + c_1) + (a_3 + b_3 + c_3) + ... + (a_{2015} + b_{2015} + c_{2015}) =$

$s\cdot(1 + 2^2 + 2^4 + ... + 2^{2014}) = s\cdot(1 + 4 + 4^2 + ... + 4^{1007})$........................**1p**

$4^k + 4^{k+1} + 4^{k+2} + 4^{k+3} = 4^k\cdot(1 + 4 + 4^2 + 4^3) = 4^k\cdot 85 \vdots 17$........................**1p**

$(1 + 4 + 4^2 + 4^3) + (4^4 + 4^5 + 4^6 + 4^7) + ... + (4^{1004} + 4^{1005} + 4^{1006} + 4^{1007}) \vdots 17$........................**1p**

Problema 3. În pătratul ABCD se ia punctul M∈(BC), astfel încât $\frac{BM}{BC} = \frac{1}{4}$. Dreapta DM intersectează pe AC în Q şi prelungirea lui (AB) în P. Aflaţi valoarea raportului $\frac{QM}{DP}$.

Marius Farcaş

Soluţie şi barem:

Din BM || AD rezultă Δ PBM~ΔPAD deci: $\frac{BP}{PA} = \frac{BM}{DA} = \frac{MP}{DP} = \frac{1}{4}$. Rezultă $MP = \frac{1}{4}DP$ **1p**

Din $\frac{BP}{AP} = \frac{1}{4}$, folosind proporţii derivate se obţine $AP = \frac{4}{3}AB$ **2p**

Din DC || AP rezultă Δ QDC~ΔQPA deci: $\frac{QD}{QP} = \frac{DC}{AP} = \frac{QC}{QA}$ şi obţinem $\frac{QD}{QP} = \frac{AB}{\frac{4}{3}AB}$, QD=$\frac{3}{7}$ DP.....**2p**

QM=DP-DQ-MP=DP-$\frac{1}{4}$ DP-$\frac{3}{7}$ DP=$\frac{9}{28}$ DP. În final, $\frac{QM}{DP}=\frac{9}{28}$ **2p**

Problema 4. . Romburile $ABCD$ și $DEFG$ au un singur punct comun, $(AB)\equiv(DE)$, $\measuredangle ABC \equiv \measuredangle DEF$, iar punctele B, D și F sunt coliniare. Demonstrați că:

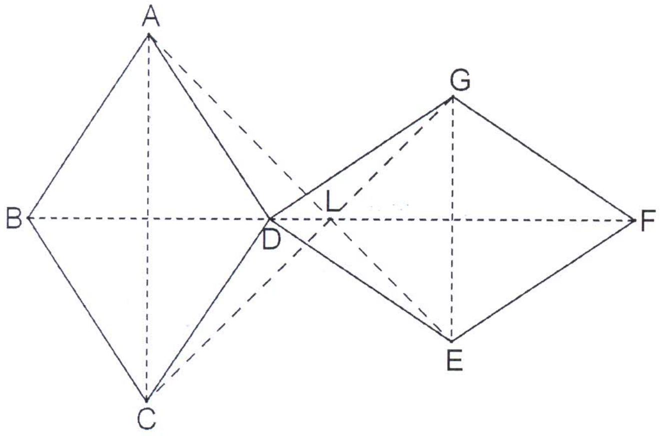
a) $m(\measuredangle ADG)=90^\circ$;

b) mijlocul segmentului $[BF]$ este punctul L, unde $\{L\}=AE\cap CG$;

c) $BF\le 2\sqrt{2}\cdot AB$.

Claudiu-Ștefan Popa

Soluție și barem:



a) $ABCD$ și $DEFG$ romburi, $\measuredangle ABC \equiv \measuredangle DEF$, $\measuredangle ABC \equiv \measuredangle ADC$ și $\measuredangle DEF, \measuredangle GDE$ sunt unghiuri suplementare $\Rightarrow$ $\measuredangle ADC, \measuredangle GDE$ sunt unghiuri suplementare..**1p**

În romburi diagonalele sunt conținute în bisectoarele unghiurilor lor, deci $\measuredangle ADB \equiv \measuredangle CDB$ și $\measuredangle GDF \equiv \measuredangle EDF$. Prin urmare $m(\measuredangle ADG)=180^\circ-\left[m(\measuredangle ADB)+m(\measuredangle GDF)\right]=180^\circ-$

$$-\left[\frac{m(\measuredangle ADC)}{2}+\frac{m(\measuredangle GDE)}{2}\right]=180^\circ-\frac{180^\circ}{2}=90^\circ$$ **1p**

b)La fel ca la a), $m(\measuredangle CDE)=90^\circ$. $m(\measuredangle ADE)=m(\measuredangle ADG)+m(\measuredangle GDE)=90^\circ+m(\measuredangle GDE)$. Similar $m(\measuredangle CDG)=90^\circ+m(\measuredangle GDE)\Rightarrow \measuredangle ADE\equiv\measuredangle CDG$.

$AD=DE=CD=DG \Rightarrow \triangle DAE \equiv \triangle DCG(LUL) \Rightarrow \measuredangle DAE\equiv\measuredangle DGC$; însă $AD\perp DG \Rightarrow AE\perp CG$ (am presupus $AC>BD$)..**1p**

$AC \perp BF$ și $EG \perp BF \Rightarrow AC \parallel EG$, deci $ACEG$ trapez. Din congruența triunghiurilor dreptunghice isoscele ADG și CDE rezultă $AG = CE$, deci $ACEG$ este trapez isoscel. $\triangle ACG \equiv \triangle CAE (LUL) \Rightarrow \measuredangle ACG \equiv \measuredangle CAE \Rightarrow \triangle LAC$ isoscel $\Rightarrow \triangle LEG$ isoscel. Dacă notăm cu O_1, respectiv O_2 intersecțiile diagonalelor romburilor $ABCD$, respectiv $DEFG$, cum LO_1, LO_2 sunt mediane în triunghiurile LAC, respectiv LEG, ele sunt și înălțimi, deci $LO_1 \perp AC$, $LO_2 \perp EG$. Însă $AC \parallel EG \Rightarrow O_1, L, O_2$ coliniare, deci $L \in BF$ **1p**

În triunghiurile LAC și LEG, dreptunghice în L avem $LO_1 = \frac{AC}{2}$, respectiv $LO_2 = \frac{GE}{2}$, deci

$LB = LO_1 + O_1B = \frac{AC}{2} + \frac{BD}{2} = \frac{DF}{2} + \frac{BD}{2} = \frac{BF}{2} \Rightarrow L$ este mijlocul segmentului BF...................... **1p**

c) $A_{ACEG} = 2 \cdot A_{ADG} + A_{ACD} + A_{EDG} = 2 \cdot A_{ADG} + \frac{A_{ABCD}}{2} + \frac{A_{ABCD}}{2} = 2 \cdot A_{ADG} + A_{ABCD} = AB^2 + A_{ABCD} \le$

$2 \cdot AB^2$ **1p**

Însă $A_{ACEG} = \frac{O_1O_2 \cdot (AC + GE)}{2} = \left(\frac{BD + DF}{2}\right)^2 = \left(\frac{BF}{2}\right)^2$. Deci, $\left(\frac{BF}{2}\right)^2 \le 2 \cdot AB^2 \Rightarrow BF \le 2\sqrt{2} \cdot AB$

.... **1p**

Obs. Soluția de mai sus, pentru b), presupune că cele două romburi nu sunt și pătrate. Pentru cazul particular în care cele două romburi sunt pătrate, cele trei cerințe sunt aproape evidente. Concurentul care tratează doar acest caz, primește **1p**.

Notă: Orice altă soluție corectă sau demers de rezolvare corect se va puncta corespunzător.