MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII ŞTIINŢIFICE

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN TIMIŞ

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA – FILIALA TIMIŞ

**OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ**

**ETAPA LOCALĂ – 19.02.2015**

**clasa a VIII-a**

**SUBIECTE**

1. Să se rezolve ecuaţia [ x ] + 3·{ x } = 2015 , unde prin [ x ] şi { x } se notează partea întreagă şi respectiv partea fracţionară a lui x.
2. a) Demonstraţi că , oricare ar fi a ∈ **R**.

(R.M.T. Nr. 1 / 2013)

 b) Arătaţi că ( 2x2 +1 )·( 2y2 + 1 ) ≥ 8xy , oricare ar fi x, y ∈ **R**.

(R.M.T. Nr. 2 / 2014)

1. Fie paralelogramul ABCD cu AB = 2·AD = 2·a , (a > 0) şi m($∢$BCD) = 120°. Pe planul paralelogramului se ridică perpendiculara AN = a .
2. Demonstraţi că BM ⊥ (NAM) , unde M este mijlocul laturii CD.
3. Determinaţi măsura unghiului format de MN cu planul paralelogramului
4. Calculaţi distanţa de la punctul A la planul (NMB).
5. Fie punctele necoplanare A, B, C, D. Să se demonstreze că, dacă , atunci AB ⊥ CD.

**NOTĂ :**

**Toate subiectele sunt obligatorii.**

**Timpul de lucru este de 3 ore.**

**Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.**

MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII ŞTIINŢIFICE

INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEŢULUI TIMIŞ

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA – FILIALA TIMIŞ

**OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ**

**etapa locală – 19 februarie 2015**

**CLASA A VIII-A**

**SOLUŢII ŞI BAREM**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1.  | [x] şi 2015 sunt numere întregi deci 3{x} este întreg.  | 1p |
| 0$\leq $ {x}$<1$ | $∙$3 ⇒ 0$\leq $ 3{x}$<3$  | 1p |
| Rezultă că 3{x} $\in $ {0 , 1 , 2} şi {x} $\in $ {0 , $\frac{1}{3}$ , $\frac{2}{3}$ }  | 2p |
| Soluţiile sunt : x1 = 2015  | 1p |
| x2 = 2014 + $\frac{1}{3}$  | 1p |
| x3 = 2013 + $\frac{2}{3}$ | 1p |
|  |  |  |
| 2.a)  |  ⇔  |  |
| Avem că 16a4 + 1 ≥ 8a2 ( echivalent cu (4a2 – 1)2 ≥ 0 ) | 1p |
| şi 8a2 + 2 ≥ 8a ( echivalent cu 2(2a – 1)2 ≥ 0 ) | 1p |
| Prin adunare obţinem : 16a4 + 1 + 8a2 + 2 ≥ 8a2 + 8a , adică  16a4 + 3 ≥ 8a . Egalitatea este satisfacută pentru  | 1p |
|  |
| b) | Din inegalitatea mediilor :  | 1p |
|  | şi  | 1p |
|  | Prin înmulţire obţinem :  , oricare ar fi x, y ∈ **R** . Cu egalitate dacă 2x2 = 1, 2y2 = 1 şi xy ≥ 0, adică  | 2p |
|  |  |  |
| 3.  | Notăm cu R mijlocul laturii [AB].⇒ AR = RB = DM = MC = a ABCD fiind paralelogram⇒ AB || CD ⇒ ➀: BMDR paralelogram ⇒ MB || DR➁: ADMR romb ⇒ AM ⊥ DR .⇒ AM ⊥ MB ABCDMRPN | 1p |
|  | AN ⊥ (ABC), MB ⊂ (ABC) ⇒ AN ⊥ MB | 1p |
|  | ⇒ MB ⊥ (AMN). | 1p |
| b)  | $∢$ (MN, (ABC)) = $∢$(MN, pr(ABC)MN) = $∢$(MN,AM) = $∢$(AMN)  | 1p |
|  | m$∢$(ABC) = 120° ⇒ m$∢$(DAB) = 60° ⇒ AM = $a\sqrt{3}$ AN ⊥ (ABC) ⇒ AN ⊥ AM ⇒ Δ AMN dreptunghic în A ⇒ $tg\left(∢AMN\right)=\frac{AN}{AM}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ ⇒ m$∢$(AMN) = 30° | 1p |
| c) | Construim AP ⊥ MN.  ⇒ AP ⊥ (MNB) ⇒ d(A, (NMB)) = AP Din a) ⇒ MN ⊥ MB , AM ⊥ MB În Δ AMN dreptunghic în A, AN = *a*, AM = $a\sqrt{3}$ ⇒ MN = 2*a*  | 1p |
|  | ⇒ $AP=\frac{AN·AM}{MN}= \frac{\sqrt{3}}{2}$  | 1p |
|  |  |  |
| 4.  | DACBM |  |
|  |  ⇒  | 2p |
|  |  ⇒  şi  | 1p |
|  |  ⇒ CA = CB şi DA = DB | 1p |
|  | ⇒ Δ ACB isoscel, Δ ADB isoscel .Fie M – mijlocul laturii [AB] ⇒ DM ⊥ AB şi CM ⊥ AB | 2p |
|  | ⇒ AB ⊥ (DMC)  ⇒ AB ⊥ CD | 1p |