

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galați

23 februarie 2014

Clasa a V-a

Problema 1. Elena are de citit o carte. După ce citește trei optimi din numărul paginilor cărții, constată că a citit cu 10 pagini mai mult decât o treime din numărul total de pagini ale cărții.

- a) Câte pagini are cartea?
- b) Câte pagini a citit Elena?

Viorica Bujor, profesor, Galați

Problema 2. Fie p un număr natural impar care nu se divide cu 5. Să se demonstreze că numărul $p^{2 \cdot n(n+1)} - 1$ este divizibil cu 10, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Manea Maricel, profesor, Munteni

Problema 3. Se dă numărul $a = 2^{2014} - 2^{2008} - 2^{2007}$.

- a) Să se determine ultimele patru cifre ale numărului a .
- b) Să se determine cel mai mic număr natural nenul b astfel încât numărul $a \cdot b$ să fie, în același timp, pătrat perfect și cub perfect.

Milu Cârmaciu, profesor, Galați

Problema 4. Numărul natural \overline{abcd} are suma cifrelor egală cu 27. Să se demonstreze că numărul $\overline{abcd} + \overline{dcba}$ se divide cu 297.

G.M. nr. 11/ 2013

Problemă selectată de Vasile Popa, profesor, Galați

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galați

23 februarie 2014

Clasa a V-a

Barem de evaluare

- ◆ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- ◆ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Nr. problemei	Soluție, rezolvare	Punctaj
1.	a) Metoda figurativă: Numărul paginilor îl reprezentăm printr-un segment de dreaptă pe care îl împărțim în 8 părți egale. Trei optimi din numărul total de pagini mai puțin 10 pagini reprezintă o treime din numărul total de pagini. Următoarele trei optimi din numărul total de pagini mai puțin 10 pagini reprezintă tot o treime din numărul total de pagini.	1p
	Ultimele două optimi din numărul total de pagini plus cele 20 pagini reprezintă a treia treime din numărul total de pagini.	1p
	Atunci trei optimi din numărul total de pagini mai puțin 10 pagini, sunt egale cu două optimi din numărul total de pagini plus cele 20 pagini.	1p
	Așadar, o optime din numărul total de pagini reprezintă 30 pagini. Cartea are 240 pagini.	2p
	Elena a citit 90 pagini.	2p
2.	$n \cdot (n+1) : 2, (\forall) n \in \mathbb{N},$ (produs de numere naturale consecutive) \Rightarrow $2 \cdot n \cdot (n+1) : 4;$	2p 1p
	p număr impar, p nu se divide cu 5 $\Rightarrow u(p) \in \{1, 3, 7, 9\} \Rightarrow$	2p
	$u(p^{2 \cdot n \cdot (n+1)}) = 1 \Rightarrow u(p^{2 \cdot n \cdot (n+1)} - 1) = 0 \Rightarrow (p^{2 \cdot n \cdot (n+1)} - 1) : 10.$	2p
3.	a) $a = 2^{2014} - 2^{2008} - 2^{2007} = 2^{2007} \cdot (2^7 - 2^1 - 1) = 2^{2007} \cdot 125$ $= 2^{2004} \cdot 2^3 \cdot 125 = 2^{2004} \cdot 1000.$ Rezultă că ultimele 3 cifre ale numărului a sunt zerouri.	2p

	<p>Cea de-a patra cifră de la sfârșit este ultima cifră a numărului 2^{2004} care este 6. Deci ultimele patru cifre ale numărului a sunt 6,0,0,0.</p>	2p
	<p>Numărul $a \cdot b$ este pătrat perfect dacă se scrie ca o putere cu exponentul multiplul lui 2, iar $a \cdot b$ este cub perfect dacă se scrie ca o putere cu exponentul multiplul lui 3; $a=2^{2007} \cdot 5^3$;</p>	2p
	<p>Exponenții puterilor din numărul a sunt divizibili cu 3, dar nu se divid cu 2. Atunci, pentru ca numărul b să fie cel mai mic număr astfel încât $a \cdot b$ să fie atât pătrat perfect cât și cub perfect \Rightarrow $b=2^3 \cdot 5^3$; $a \cdot b=2^{2007} \cdot 5^3 \cdot 2^3 \cdot 5^3=2^{2010} \cdot 5^6=(2^{335})^6 \cdot 5^6=(2^{1005} \cdot 5^3)^2=(2^{670} \cdot 5^2)^3$.</p>	1p
4.	<p>$A = \overline{abcd} + \overline{dcba} = 1001 \cdot (a + d) + 110 \cdot (b + c) =$ $11 \cdot 91(a + d) + 11 \cdot 10(b + c) \Rightarrow A : 11 \quad (1)$</p>	3p
	<p>Dar $A=891 \cdot (a + d) + 110 \cdot (a + b + c + d) = 27 \cdot 33 \cdot (a + d) + 110 \cdot (a + b + c + d) =$ $27 \cdot 33 \cdot (a + d) + 110 \cdot 27 = 27 \cdot [33 \cdot (a + d) + 110] \Rightarrow A : 27 \quad (2)$</p>	3p
	<p>$(11, 27) = 1$ $A : 11$ $A : 27$ } $\Rightarrow A : 297.$</p>	1p