VI. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIII. EMMV
megyei szakasz, 2024. február 3.

XI. osztály

1. feladat (10 pont)**.** Az $(a_n)_{n\geq 1}$, illetve $(b_n)_{n\geq 0}$ sorozatot az

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{k}{4}\right], \forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ és a } b_n = a_{4n+1}^2 + a_{4n+2}^2 + a_{4n+3}^2 + a_{4n+4}^2, \forall n \in \mathbb{N}$$

összefüggésekkel értelmezzük, ahol $[x]$ az x valós szám egész részét jelöli.

a) Igazold, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^4}{b_n} = \dfrac{1}{16}$.

b) Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty} n^4 \left(2^{\frac{1}{b_n}} + \ln\left(1+\dfrac{1}{b_n}\right) - 1\right)$ határértéket!

Cziprok András, Szatmárnémeti

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) $a_{4n+1} = \sum\limits_{k=1}^{4n+1} \left[\frac{k}{4}\right]$

Mivel bármely $k \in \mathbb{N}$ szám $4p$, $4p+1$, $4p+2$ vagy $4p+3$ alakú és $\left[\frac{4p}{4}\right] = \left[\frac{4p+1}{4}\right] = \left[\frac{4p+2}{4}\right] = \left[\frac{4p+3}{4}\right] = p$, felírhatjuk, hogy

$$a_{4n+1} = 4\sum_{p=0}^{n-1} p + \left[\frac{4n}{4}\right] + \left[\frac{4n+1}{4}\right] = 4 \cdot \frac{(n-1)n}{2} + n + n = 2n^2 - 2n + 2n = 2n^2$$

(1 pont)

Hasonlóan:

$$a_{4n+2} = \sum_{k=1}^{4n+2} \left[\frac{k}{4}\right] = \sum_{k=1}^{4k+1} \left[\frac{k}{4}\right] + \left[\frac{4n+2}{4}\right] =$$
$$= a_{4n+1} + n = 2n^2 + n$$

(1 pont)

$$a_{4n+3} = \sum_{k=1}^{4n+3} \left[\frac{k}{4}\right] = \sum_{k=1}^{4n+2} \left[\frac{k}{4}\right] + \left[\frac{4n+3}{4}\right] =$$
$$= a_{4n+2} + n = 2n^2 + n + n = 2n^2 + 2n$$

(1 pont)

és

$$a_{4n+4} = \sum_{k=1}^{4n+4} \left[\frac{k}{4}\right] = \sum_{k=1}^{4n+3} \left[\frac{k}{4}\right] + \left[\frac{4n+4}{4}\right] =$$
$$= a_{4n+3} + n + 1 = 2n^2 + 3n + 1$$

(1 pont)

Kiszámíthatjuk tehát, hogy

$$b_n = (2n^2)^2 + (2n^2+n)^2 + (2n^2+2n)^2 + (2n^2+3n+1)^2 = \\ = 16n^4 + 24n^3 + 18n^2 + 6n + 1 \qquad \textbf{(1 pont)}$$

és $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^4}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^4}{16n^4+24n^3+18n^2+6n+1} = \frac{1}{16}$ **(1 pont)**

b) Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{16n^4+24n^3+18n^2+6n+1} = 0$ **(1 pont)**

belátjuk, hogy a keresett határérték $\infty \cdot 0$ alakú.

A keresett határérték felírható mint:

$\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{2^{\frac{1}{b_n}}-1}{\frac{1}{b_n}} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{b_n}\right)}{\frac{1}{b_n}}\right] \cdot \frac{n^4}{b_n} =$ **(1 pont)**

$= (\ln 2 + 1) \cdot \frac{1}{16} = \frac{\ln 2 + 1}{16}$ **(1 pont)**

■

2. feladat (10 pont)**.** Az $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ mátrix esetén $\det(A^2 - 2I_2) = 0$. Bizonyítsd be, hogy $A^2 = 2I_2$ és $\det A = -2$.

Matlap 1/2024, L:3682

Első megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

Legyen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$. Ekkor $A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix}$ **(1 pont)**

és $A^2 - 2I_2 = \begin{pmatrix} a^2+bc-2 & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc-2 \end{pmatrix}$. **(1 pont)**

Mivel $\det(A^2 - 2I_2) = 0$, következik, hogy: $(a^2+bc-2)(d^2+bc-2) - bc(a+d)^2 = 0$

$a^2d^2 + a^2bc - 2a^2 + d^2bc + b^2c^2 - 2bc - 2d^2 - 2bc + 4 - a^2bc - 2abcd - bcd^2 = 0$

Csoportosítva a tagokat:

$(a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2) - 2(a^2+d^2) - 4bc + 4 = 0$ **(1 pont)**

$(ad-bc)^2 - 2(a^2+d^2+2ad) + 4ad - 4bc + 4 = 0$

$(ad-bc)^2 + 4(ad-bc) + 4 - 2(a+d)^2 = 0$

$[(ad-bc)+2]^2 - 2(a+d)^2 = 0$ **(3 pont)**

Mivel $ad - bc + 2 \in \mathbb{Q}$ és $a + d \in \mathbb{Q}$, következik, hogy $ad - bc + 2 = 0$ és $a + d = 0$ **(1 pont)**

Tehát $\det A = ad - bc = -2$. **(1 pont)**

Kiszámítjuk az A^2 elemeit: $a^2 + bc = a^2 + ad + 2 = a(a+d) + 2 = 2$ és $bc + d^2 = d^2 + ad + 2 = d(a+d) + 2 = 2$. Innen $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2$. **(1 pont)**

■

Második megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

Felírhatjuk, hogy $A^2 - 2I_2 = (A - \sqrt{2}I_2)(A + \sqrt{2}I_2)$, és mivel $\det(A^2 - 2I_2) = 0$, következik, hogy vagy $\det(A - \sqrt{2}I_2) = 0$, vagy $\det(A + \sqrt{2}I_2) = 0$. **(2 pont)**

Legyen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$.

$\det(A - \sqrt{2}I_2) = (a - \sqrt{2})(d - \sqrt{2}) - bc = (ad - bc + 2) - \sqrt{2}(a + d)$ **(2 pont)**

Mivel $ad - bc + 2 \in \mathbb{Q}$ és $a + d \in \mathbb{Q}$, következik, hogy $ad - bc + 2 = 0$ és $a + d = 0$ **(2 pont)**

Hasonlóan, ha $\det(A + \sqrt{2}I_2) = 0$, következik, hogy $(ad - bc + 2) + \sqrt{2}(a + d) = 0$ és $ad - bc + 2 = 0$ és $a + d = 0$. **(1 pont)**

Az 1. megoldáshoz hasonlóan következik, hogy $\det A = -2$ **(1 pont)**

és $A^2 = 2I_2$ **(1 pont)**

Megjegyzés. Miután kimutattuk, hogy $\det A = -2$ és $a+d = \operatorname{Tr}(A) = 0$, alkalmazhatjuk Hamilton–Cayley tételét: $A^2 - \operatorname{Tr}(A) \cdot A + \det(A) \cdot I_2 = O_2 \Rightarrow A^2 = 2I_2$.

■

3. feladat (10 pont)**.** Az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat általános tagja $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k \cdot k!$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

a) Igazold, hogy a sorozat tagjai közt egyetlen négyzetszám van!

b) Határozd meg az a_{2024} utolsó 505 számjegyének összegét!

(Szilágyi Judit, Kolozsvár)

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) $a_1 = 1 \cdot 1! = 1$, ami négyzetszám.
$a_2 = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! = 5$, ami nem négyzetszám. **(1 pont)**

Bármely $k \geq 3$-ra $k \cdot k! = k \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$ osztható 3-mal, következik, hogy bármely $n \geq 3$-ra $a_n = 5 + 3N = 3M + 2$ alakú. **(2 pont)**

Viszont a négyzetszámok 3-mal való osztási maradéka csak 0 vagy 1 lehet, így a_n nem négyzetszám. **(1 pont)**

Tehát a sorozat tagjai közt csak egy négyzetszám található.

b) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k \cdot k! = \sum\limits_{k=1}^{n} (k + 1 - 1) \cdot k! = \sum\limits_{k=1}^{n} [(k + 1)! - k!] = (n + 1)! - 1$

Tehát $a_{2024} = (2025)! - 1$. **(1 pont)**

Megszámoljuk, hogy hány nullában végződik a 2025! szám. Mivel $2025 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2025$, ez attól függ, hogy a prímtényezőkre bontott alakjában hány $2 \cdot 5$-ös párt tudunk létrehozni. Mivel 2-es tényezőből több van, a párok száma az 5-ös tényezők számával fog megegyezni:

$$\left[\frac{2025}{5}\right] + \left[\frac{2025}{5^2}\right] + \left[\frac{2025}{5^3}\right] + \left[\frac{2025}{5^4}\right] \quad (5^5 > 2025),$$

(1 pont)

ami $405 + 81 + 16 + 3 = 505$. **(2 pont)**

Tehát az a_{2024} szám egyenlő egy 505 nullában végződő szám és 1 különbségével, ami 505 darab 9-esben fog végződni. Így az a_{2024} utolsó 505 számjegyének összege $505 \cdot 9 = 4545$. **(1 pont)**

■

4. feladat (10 pont)**.** Az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sorozatot a következőképpen értelmezzük:

$$a_1 = 1 \text{ és } a_{n+1}(n + a_n) = na_n, \ \forall n \geq 1.$$

a) Igazold, hogy a sorozat konvergens!

b) Számítsd ki az $\left(\dfrac{1}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sorozat határértékét!

c) Igazold, hogy $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_{k+1}^2} < \frac{n(5n+3)}{2}$, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén!

Bencze Mihály, Brassó

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) $a_{n+1} = \dfrac{na_n}{n+a_n}$ (1), a rekurencia reláció alapján.

Indukcióval igazolható, hogy $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Valóban $a_1 = 1 > 0$ és $\forall k \in \mathbb{N}^*$ esetén, ha $a_k > 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow a_{k+1} = \dfrac{ka_k}{k+a_k} > 0$. Tehát $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, vagyis a sorozat alulról korlátos. **(0,75 pont)**

Az (1)-es összefüggés alapján $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n}{n+a_n} < 1$, mivel $n < n + a_n$. Mivel $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pozitív tagú sorozat és $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, a sorozat szigorúan csökkenő. **(0,75 pont)**

Mivel a sorozat szigorúan csökkenő és alulról korlátos, következik, hogy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ konvergens. **(0,5 pont)**

b) Az (1)-es összefüggést átalakítva az $\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{n+a_n}{na_n} = \dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{n}$ ekvivalens alakra hozhatjuk. **(1 pont)**

Tehát

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{a_2} &= \tfrac{1}{a_2} + \tfrac{1}{1}\\
\tfrac{1}{a_3} &= \tfrac{1}{a_2} + \tfrac{1}{2}\\
&\vdots\\
\tfrac{1}{a_n} &= \tfrac{1}{a_{n-1}} + \tfrac{1}{n-1}
\end{aligned}$$

és az összefüggéseket összeadva azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1}.$$

(2 pont)

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = +\infty$. **(1 pont)**

c) $\frac{1}{a_{k+1}^2} = \left(2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k}\right)^2$

Felírjuk a számtani és négyzetes közepek közti egyenlőtlenséget:

$$\frac{2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k}}{k} \leq \sqrt{\frac{2^2 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{k^2}}{k}},$$

ahonnan $\left(2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k}\right)^2 \leq k\left(2^2 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{k^2}\right)$.

Tehát $\frac{1}{a_{k+1}^2} \leq k\left(2^2 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{k^2}\right)$. (**1 pont**)

Ugyanakkor

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{k^2} < \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(k-1)k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{k}.$$

(**1 pont**)

Így $\frac{1}{a_{k+1}^2} \leq k\left(2^2 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{k^2}\right) < k\left(4 + 1 - \frac{1}{k}\right) = 5k - 1$ (**0,5 pont**)

és $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{a_{k+1}^2} < \sum\limits_{k=1}^{n}(5k-1) = 5\frac{n(n+1)}{2} - n = \frac{5n^2+3n}{2} = \frac{n(5n+3)}{2}$. (**0,5 pont**)

■