SOLUŢII
- clasa a V-a -

Problema 1.

a) Câţi multipli de 6 sunt mai mici sau egali cu 610?

b) Precizaţi care dintre aceştia sunt multipli de 96 şi determinaţi numărul lor.

Soluţie. a) Un multiplu de 6 este de forma $6 \cdot t$, cu t număr natural. Din $0 \leq 6 \cdot t \leq 610$ rezultă $0 \leq t \leq 101$. În total, sunt 102 astfel de numere.
b) Un multiplu al lui 96 este de forma $96 \cdot k$, unde k este număr natural. Deoarece $96 = 6 \cdot 16$, orice multiplu de 96 este multiplu de 6. Deci, căutăm valorile lui k astfel încât $6 \cdot 0 \leq 6 \cdot 16k \leq 6 \cdot 101$. Din $0 \leq 16k \leq 101$, rezultă $0 \leq k \leq 6$. Astfel, se obţin 7 numere şi anume: $0, 96, 96 \cdot 2, \ldots, \; 96 \cdot 6$.

Problema 2. Să se determine numerele $\overline{ab}$ astfel încât numărul $\overline{aaa} + 37 \cdot (a+b)$ să fie un pătrat perfect.
Soluţie. Fie $n = \overline{aaa} + 37 \cdot (a+b)$. Avem $n = 111 \cdot a + 37 \cdot (a+b) = 37 \cdot (4 \cdot a + b)$. Dar cum n trebuie să fie pătrat perfect rezultă că $4 \cdot a + b = 37 \cdot k^2$, k număr natural nenul. Însă a şi b fiind cifre implică $4 \cdot a + b \leq 36 + 9$. Prin urmare $k = 1$ şi deci $4 \cdot a + b = 37$ de unde $(a, b) \in \{(9,1), (8,5), (7,9)\}$. Numerele căutate sunt $91, 85, 79$.

Problema 3.

a) Arătaţi că $10^{24} < 2^{80} < 10^{25}$.

b) Câte cifre are numărul $A = 2^{320} \cdot 5^{240}$?

G.M. nr. 4/2012

Soluţie. a) Deoarece $10^{24} = (10^3)^8 = 1000^8$ şi $2^{80} = (2^{10})^8 = 1024^8$, rezultă că $10^{24} < 2^{80}$. Pentru a obţine şi cealaltă inegalitate, cum $2^{80} = 2^{25} \cdot 2^{55}$ şi $10^{25} = 2^{25} \cdot 5^{25}$, rămâne să comparăm numerele 2^{55} cu 5^{25}. În final, din $2^{55} = (2^{11})^5 = 2048^5$ şi $(5^5)^5 = 3125^5$, rezultă $2^{80} < 10^{25}$.
b) $A = 2^{80} \cdot 10^{240}$. Folosind relaţia a), obţinem $10^{264} < A < 10^{265}$, deci A are 265 de cifre.

Problema 4. Fie n un număr natural nenul. Notăm cu $S(n)$ suma cifrelor lui n. Arătaţi că dacă $S(n) = S(2 \cdot n)$, atunci n se divide cu 9.
Soluţie. Avem $n = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_0} = 10^k a_k + \ldots + 10 a_1 + a_0 = M9 + (a_k + a_{k-1} + \ldots + a_1 + a_0) = M9 + S(n)$. Prin urmare rezultă că restul împărţirii lui n la 9 este egal cu restul împărţirii lui $S(n)$ la 9.
Analog avem $2n = M9 + S(2n)$. Deci restul împărţirii lui $2n$ la 9 este egal cu restul împărţirii lui $S(2n)$ la 9. Cum $S(n) = S(2n)$ rezultă că n şi $2n$ dau acelaşi rest la împărţirea cu 9, deci $n = 9c_1 + r, 2n = 9c_2 + r, \; 0 \leq r \leq 8$. Scăzând aceste două relaţii se obţine $n = M9$.

BAREM DE CORECTARE

CLASA a V - a

Problema 1.
oficiu 1p
a) Un multiplu de 6 este de forma $6 \cdot t$, t număr natural 1p
$0 \le 6 \cdot t \le 610 \Rightarrow 0 \le t \le 101$ 1p
Sunt 102 astfel de numere 1p
b) Un multiplu al lui 96 este de forma $96 \cdot k$, k număr natural 1p
$96 = 6 \cdot 16 \Rightarrow$ orice multiplu de 96 este multiplu de 6 .... 2p
$6 \cdot 0 \le 6 \cdot 16k \le 6 \cdot 101$ 1p
$0 \le 16k \le 101 \Rightarrow 0 \le k \le 6$ 1p
Sunt 7 astfel de numere şi anume: $0, 96, 96 \cdot 2, \ldots,\ 96 \cdot 6$ 1p
Total 10p

Problema 2.
oficiu 1p
Fie $n = \overline{aaa} + 37 \cdot (a+b)$
$n = 111 \cdot a + 37 \cdot (a+b) = 37 \cdot (4 \cdot a + b)$ 2p
n pătrat perfect $\Rightarrow 4 \cdot a + b = 37 \cdot k^2$, $k \ne 0$ 2p
$37 \cdot k^2 = 4 \cdot a + b \le 4 \cdot 9 + 9 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow 4 \cdot a + b = 37$ 2p
$(a, b) \in \{(9,1), (8,5), (7,9)\}$ 2p
Numerele căutate sunt $91, 85, 79$ 1p
Total 10p

Problema 3.
oficiu 1p
a) $10^{24} = (10^3)^8 = 1000^8$, $2^{80} = (2^{10})^8 = 1024^8 \Rightarrow 10^{24} < 2^{80}$ 3p
$2^{80} = 2^{25} \cdot 2^{55}$, $10^{25} = 2^{25} \cdot 5^{25}$ 1p
comparăm numerele 2^{55} cu 5^{25} 1p
$2^{55} = (2^{11})^5 = 2048^5$, $(5^5)^5 = 3125^5 \Rightarrow 2^{80} < 10^{25}$ 1p
b) $A = 2^{80} \cdot 10^{240}$ 1p
Din relaţia a), $10^{264} < A < 10^{265}$ 1p
A are 265 de cifre 1p
Total 10p

Problema 4.
oficiu 1p
$n = M9 + S(n)$ 2p
restul împărţirii lui n la 9= restul împărţirii lui $S(n)$ la 9 .... 2p
$2n = M9 + S(2n)$ 1p
restul împărţirii lui $2n$ la 9= restul împărţirii lui $S(2n)$ la 9 .... 1p
$S(n) = S(2n) \Rightarrow n = 9c_1 + r,\ 2n = 9c_2 + r,\ 0 \le r \le 8$ 2p
n este multiplu de 9 .... 1p
Total 10p

Inspectoratul Şcolar Judeţean Dolj
Filiala Craiova a SSMR

Etapa locală a Olimpiadei naţionale de matematică
Craiova, 9 februarie 2013
Clasa a V-a

Problema 1.

a) Câţi multipli de 6 sunt mai mici sau egali cu 610?

b) Precizaţi care dintre aceştia sunt multipli de 96 şi determinaţi numărul lor.

***

Problema 2. Să se determine numerele $\overline{ab}$ astfel încât numărul $\overline{aaa}+37\cdot(a+b)$ să fie un pătrat perfect.

***

Problema 3.

a) Arătaţi că $10^{24} < 2^{80} < 10^{25}$.

b) Câte cifre are numărul $A = 2^{320} \cdot 5^{240}$?

G.M. nr. 4/2012

Problema 4. Fie n un număr natural nenul. Notăm cu $S(n)$ suma cifrelor lui n. Arătaţi că dacă $S(n) = S(2 \cdot n)$, atunci n se divide cu 9.

***

Notă:
Timp de lucru: 2 ore;
Toate subiectele sunt obligatorii;
Fiecare subiect va fi notat cu puncte între 1 şi 10.