OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ, 15.02.2015 –
CLASA A XI-A
Subiecte

1. Fie șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ cu termenul general $x_n = \frac{1}{n^3+1} + \frac{4}{n^3+2} + \frac{9}{n^3+3} + \ldots + \frac{n^2}{n^3+n}$.

Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

2. Fie matricele diferite $A(a,x_p) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ x_p & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}),\ p \in \mathbb{N}^*$.

a) Determinați $n \in \mathbb{N}^*$ și $x_1 \in \mathbb{Z}$ pentru care $A^n(0,x_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2014 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Determinați $p \in \mathbb{N}^*$ și $x_1, x_2, \ldots, x_p \in \mathbb{N}$ pentru care

$$A(\mathrm{a},x_1)A(\mathrm{a},x_2)\ldots A(\mathrm{a},x_p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2016 & 1 \end{pmatrix}.$$

Prof. Gabriel Necula, Ploiești

3. Fie șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 = x_2 = 1$ si $x_{n+1} = \sqrt{x_n + n x_{n-1}}$ pentru orice număr natural $n \geq 2$.

a) Demonstrați că $n-3 < x_n < n-1$, oricare ar fi n număr natural, $n \geq 4$.

b) Determinați $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$, unde $y_n = \frac{n x_{n+k}}{(n+k)x_n}$, $k \in \mathbb{N}^*$ fixat.

Prof. Petre și Cătălin Năchilă, Ploiești

4. Se consideră mulțimea permutărilor de ordin trei $S_3 = \{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5, \tau_6\}$ și $e \in S_3$ permutarea identică. Arătați că:

a) $\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4\tau_5\tau_6 \neq e$

b) $(\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4\tau_5\tau_6)^2 = \tau_1^2\tau_2^2\tau_3^2\tau_4^2\tau_5^2\tau_6^2$

c) $\tau_1\tau_2^2\tau_3^3\tau_4^4\tau_5^5\tau_6^6 \neq \tau_6\tau_5^2\tau_4^3\tau_3^4\tau_2^5\tau_1^6$.

Prof. Cezar Apostolescu, Ploiești

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.