

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
Clasa a V-a

1.a) Aflați 11 numere naturale consecutive a căror sumă să fie 99.

b) Un număr natural de patru cifre are primele două cifre identice, iar cifra unităților 5. Acest număr se împarte la un număr de două cifre și se obține restul 98. Aflați deîmpărțitul, împărțitorul și câtul.

Prof. Ana Marcela Popa

Soluție:

a) $(a+1)+(a+2)+(a+3)+\dots+(a+11)=99 \Leftrightarrow 11a+66=99 \Leftrightarrow a=3$. Numerele sunt 4,5,6,...,14

b) Notăm $\overline{aab5}$, $a \neq 0$ numărul natural considerat.

$$\overline{aab5} = \overline{xy} \cdot q + 98, 0 \leq 98 < \overline{xy} \Rightarrow \overline{xy} = 99.$$

$$\overline{aab5} = 99 \cdot q + 98. \Rightarrow \text{ultima cifră a lui } 99 \cdot q + 98 \text{ este } 5 \text{ și deci ultima cifră a lui } q \text{ este } 3.$$

$$1105 \leq \overline{aab5} \leq 9995 \Rightarrow 1105 \leq 99 \cdot q + 98 \leq 9995 \Rightarrow 11 \leq q \leq 99 \text{ și, cum ultima cifră a lui } q \text{ este } 3, \\ \Rightarrow q \in \{13, 23, 33, \dots, 93\}.$$

Deîmpărțitul este 3365, împărțitorul este 99 și câtul este 33.

Barem

a)	$(a+1)+(a+2)+(a+3)+\dots+(a+11)=99$	2 p
	Numerele sunt 4,5,6,...,14	1 p
b)	$\overline{aab5} = x \cdot q + 98, 0 \leq 98 < x$	1 p
	ultima cifră a lui $99 \cdot q + 98$ este 5 și $U(q)=3$	1 p
	Verificare pentru $q \in \{13, 23, 33, \dots, 93\}$	1 p
	Deîmpărțitul este 3365, împărțitorul este 99 și câtul este 33	1 p

2. Dacă un număr natural se citește la fel de la stânga la dreapta și de la dreapta la stânga, atunci el se numește “număr-oglină”.

a) Câte “numere-oglină” cu trei cifre sunt?

b) Calculați suma “numerelor-oglină” de trei cifre pentru care cifra zecilor este egală cu suma celorlalte două cifre;

c) Determinați câtul și restul împărțirii lui $\underbrace{100\dots01}_{2k}$ la 11, unde $k \in \mathbb{N}$;

d) Arătați că orice “număr-oglină” care are un număr par de cifre se divide la 11.

Prof. Stela Boghian

Soluție

a) Numerele sunt de forma \overline{aba} unde a poate lua 9 valori distincte iar b 10 valori distincte. În total sunt 90 de numere.

b) $b=2a$, $b \leq 8$, $a \neq 0$, $(a, b) \in \{(1, 2); (2, 4); (3, 6); (4, 8)\}$. Suma este $121 + 242 + 363 + 484 = 1210$.

c) $\underbrace{10000\dots001}_{2k} : 11 = 9 \underbrace{090909\dots091}_{(k-1) \text{ grupe } 09}$; Câtul este $\underbrace{9090909\dots091}_{(k-1) \text{ grupe } 09}$ și restul este 0

d)

$$\overline{a_1 a_2 \dots a_n a_n \dots a_2 a_1} = a_1 \cdot \underbrace{1 \underbrace{0\dots0}_{2(n-1)}}_1 + a_2 \cdot \underbrace{1 \underbrace{0\dots0}_{2(n-2)}}_1 + \dots + a_n \cdot 11 \text{ și fiecare număr de forma } \underbrace{10000\dots001}_{2k} \text{ este}$$

divizibil cu 11 (conform c sau se poate arăta cu un criteriu de divizibilitate cu 11).

În concluzie, orice “număr-oglină” care are un număr par de cifre se divide la 11.

Barem

a) Sunt 90 de numere	2 p
b) $121 + 242 + 363 + 484 = 1210$	2 p
c) Câtul este $\underbrace{10000\dots001}_{2k} : 11 = 9\underbrace{090909\dots091}_{(k-1) \text{ grupe } 09}$; restul este 0.	1 p
d) $\overline{a_1 a_2 \dots a_n a_n \dots a_2 a_1} = a_1 \cdot \overline{1 \underbrace{0\dots0}_{2(n-1)}} + a_2 \cdot \overline{1 \underbrace{0\dots0}_{2(n-2)}} + \dots + a_n \cdot 11$	1 p
Fiecare termen al sumei se divide cu 11. Finalizare	1 p

3. Fie numărul natural $A = 2^{2013n} + 3^{2013n} + 5^{2013n} + 7^{2013n}$

- Calculați A dacă $n=0$.
- Calculați ultima cifră a numărului A dacă $n=1$.
- Arătați ca A nu este pătrat perfect oricare ar fi numărul natural nenul n .

Prof. Dorel Ispășoiu

Soluție

a) Dacă $n=0$ atunci $A = 1+1+1+1=4$

b) Dacă $n=1$ atunci

$$A = 2^{2013} + 3^{2013} + 5^{2013} + 7^{2013} \Rightarrow U(A) = U(2^{4 \cdot 503 + 1} + 3^{4 \cdot 503 + 1} + 5^{2013} + 7^{4 \cdot 503 + 1}) = U(6 \cdot 2^1 + 1 \cdot 3^1 + 5^1 + 1 \cdot 7^1) = U(2^1 + 3^1 + 5^1 + 7^1) = 7$$

c) $2013n = 4 \cdot 503n + n \Rightarrow U(A) = U(2^{2013n} + 3^{2013n} + 5^{2013n} + 7^{2013n}) = U(2^{4 \cdot 503n + n} + 3^{4 \cdot 503n + n} + 5 + 7^{4 \cdot 503n + n}) = U(6 \cdot 2^n + 1 \cdot 3^n + 5 + 1 \cdot 7^n) = U(2^n + 3^n + 5 + 7^n)$

Cazul I: $n=4k \Rightarrow U(A) = U(2^{4k} + 3^{4k} + 5 + 7^{4k}) = U(6+1+5+1) = 3 \Rightarrow A$ nu este patrat perfect,

Cazul II: $n=4k+1 \Rightarrow U(A) = U(2^{4k+1} + 3^{4k+1} + 5 + 7^{4k+1}) = U(2^1 + 3^1 + 5^1 + 7^1) = 7 \Rightarrow A$ nu este patrat perfect,

Cazul III: $n=4k+2 \Rightarrow U(A) = U(2^{4k+2} + 3^{4k+2} + 5 + 7^{4k+2}) = U(2^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2) = 7 \Rightarrow A$ nu este patrat perfect

Cazul IV: $n=4k+3 \Rightarrow U(A) = U(2^{4k+3} + 3^{4k+3} + 5 + 7^{4k+3}) = U(2^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3) = 3 \Rightarrow A$ nu este patrat perfect.

Barem

a) $A = 1+1+1+1=4$	1 p
b) Aflarea ultimei cifre pentru fiecare din cei patru termeni	2 p
$U(A)=7$	1 p
c) $U(A) = U(2^{2013n} + 3^{2013n} + 5^{2013n} + 7^{2013n}) = U(2^n + 3^n + 5 + 7^n)$	1 p
Aflarea ultimei cifre pentru fiecare din cele patru cazuri și interpretare	2 p

Notă: Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA
16 februarie 2013

CLASA a V-a

- 1** a) Aflați 11 numere naturale consecutive a căror sumă să fie 99.
- b) Un număr natural de patru cifre are primele două cifre identice, iar cifra unităților 5. Acest număr se împarte la un număr de două cifre și se obține restul 98. Aflați deîmpărțitul, împărțitorul și câtul.
- 2** Dacă un număr natural se citește la fel de la stânga la dreapta și de la dreapta la stânga, atunci el se numește “număr-oglină”.
- a) Câte “numere-oglină” cu trei cifre sunt?
- b) Calculați suma “numerelor-oglină” de trei cifre pentru care cifra zecilor este egală cu suma celorlalte două cifre;
- c) Determinați câtul și restul împărțirii lui $1\underbrace{00\dots0}_{2k}1$ la 11, unde $k \in \mathbb{N}$ iar numărul cifrelor de zero este $2k$;
- d) Arătați că orice “număr-oglină” care are un număr par de cifre se divide la 11.
- 3** Fie numărul natural $A = 2^{2013n} + 3^{2013n} + 5^{2013n} + 7^{2013n}$
- a) Calculați A dacă $n=0$.
- b) Calculați ultima cifră a numărului A dacă $n=1$.
- c) Arătați ca A nu este pătrat perfect oricare ar fi numărul natural nenul n .

- Notă:**
- 1. Toate subiectele sunt obligatorii.**
 - 2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.**
 - 3. Timp de lucru 2 ore.**