OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2013
CLASA a VI-a

SUBIECTUL I

a) Arătaţi că produsul tuturor divizorilor naturali ai numărului 2013 este pătrat perfect.

b) Fie un număr natural p care se divide cu 6, dar nu se divide cu 4 şi nu se divide cu 9.

1) Arătaţi că p nu este pătrat perfect.

2) Arătaţi că produsul tuturor divizorilor naturali ai numărului p este pătrat perfect.

SUBIECTUL al II-lea

Fie $A, C, D, B,$ coliniare în această ordine, astfel încât, $[AD] \equiv [CB]$, iar M mijlocul segmentului $[CD]$. Construim $FC \perp AB$ şi $ED \perp AB$, astfel încât, $[FC] \equiv [ED]$, iar F şi E sunt situate în semiplane opuse determinate de dreapta AB. Fie $CS \perp FB$, cu $S \in FB$ şi $DR \perp AE$, cu $R \in AE$. Să se arate că:

a) Segmentele $[AB]$ şi $[DC]$ au acelaşi mijloc;

b) $[RE] \equiv [SF]$;

c) Punctele S, M, R sunt coliniare.

SUBIECTUL al III-lea

Fie un triunghi VAL, dreptunghic în V, cu $VA < VL$. Fie E, C, M mijloacele segmentelor $[AL], [EL]$, respectiv, $[VE]$. Mediatoarele segmentelor $[VE]$ şi $[EL]$ se intersectează în I. Fie $IC \cap VL = \{R\}$. Se ştie că $\sphericalangle REL \equiv \sphericalangle EVL$. Să se arate că:

a) $\sphericalangle REL \equiv \sphericalangle RLE$;

b) Triunghiul VIL este isoscel;

c) IE este mediatoarea segmentului $[MC]$.

SUBIECTUL al IV-lea

Spunem că o mulţime X de numere naturale are proprietatea (P), dacă suma oricăror trei elemente din X este un număr prim.

a) Arătaţi că mulţimea $\{11; 29; 49; 59\}$ nu are proprietatea (P).

b) Daţi un exemplu de mulţime cu proprietatea (P), de forma $A = \{5; 7; a; b\}$.

c) Arătaţi că nu există mulţimi X cu proprietatea (P), astfel încât $card\ X \geq 5$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii şi se notează cu puncte de la 0 la 7.
Timp de lucru: 2 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2013
CLASA a VI-a

SUBIECTUL I

a) Arătaţi că produsul tuturor divizorilor naturali ai numărului 2013 este pătrat perfect.

b) Fie un număr natural p care se divide cu 6, dar nu se divide cu 4 şi nu se divide cu 9.

1) Arătaţi că p nu este pătrat perfect.

2) Arătaţi că produsul tuturor divizorilor naturali ai numărului p este pătrat perfect.

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

a) $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$ ....1 punct

$D_{2013} = \{1; 3; 11; 61; 3\cdot 11; 3\cdot 61; 11\cdot 61; 3\cdot 11\cdot 61\}$. ....1 punct

$P_{div} = 3^4 \cdot 11^4 \cdot 61^4 = \left(3^2 \cdot 11^2 \cdot 61^2\right)^2 \Rightarrow P_{div}$ este pătrat perfect ....1 punct

b) $p \vdots 2$ *şi* $p \not\vdots 2^2$ ....1 punct

$$\left.\begin{array}{l} p \vdots 2 \\ p \not\vdots 2^2 \\ 2 \text{ } e \text{ } nr.\ prim \end{array}\right\} \Rightarrow p \text{ nu este pătrat perfect.}$$ ....1 punct

c) Fie $d_1, d_2, d_3, ..., d_k$, toţi divizorii naturali ai numărului natural p, astfel încât $1 = d_1 < d_2 < d_3 < ... < d_k = p$.

Atunci $d_1 = \dfrac{p}{d_k}; d_2 = \dfrac{p}{d_{k-1}}; d_3 = \dfrac{p}{d_{k-2}}; ...; d_k = \dfrac{p}{d_1}$;

Înmulţind aceste relaţii, membru cu membru, obţinem:

$d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \cdot ... \cdot d_k = \dfrac{p}{d_k} \cdot \dfrac{p}{d_{k-1}} \cdot \dfrac{p}{d_{k-2}} \cdot ... \cdot \dfrac{p}{d_1} \Rightarrow \left(d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \cdot ... \cdot d_k\right)^2 = p^k$. ....1 punct

Din $p \vdots 2; p \vdots 3; p \not\vdots 2^2; p \not\vdots 3^2 \Rightarrow p = 2 \cdot 3 \cdot p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot p_3^{e_3} \cdot ... \cdot p_k^{e_k} \Rightarrow$

$Card\ D_p = (1+1)\cdot(1+1)\cdot(e_1+1)\cdot(e_2+1)\cdot(e_3+1)\cdot ... \cdot(e_k+1) \vdots 4 \Rightarrow k \vdots 4 \Rightarrow k = 4t$, cu $t \in \mathbb{N}^*$.

$\left(d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \cdot ... \cdot d_k\right)^2 = p^k = p^{4t} = \left(p^{2t}\right)^2 \Rightarrow d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \cdot ... \cdot d_k = \left(p^t\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \cdot ... \cdot d_k$ este pătrat perfect. ....1 punct

Notă: Orice altă soluţie se punctează corespunzător.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2013
CLASA a VI-a

SUBIECTUL al II-lea

Fie $A, C, D, B,$ coliniare în această ordine, astfel încât, $[AD] \equiv [CB],$ iar M mijlocul segmentului $[CD]$. Construim $FC \perp AB$ şi $ED \perp AB,$ astfel încât, $[FC] \equiv [ED],$ iar F şi E sunt situate în semiplane opuse determinate de dreapta AB. Fie $CS \perp FB,$ cu $S \in FB$ şi $DR \perp AE,$ cu $R \in AE.$ Să se arate că:

a) Segmentele $[AB]$ şi $[DC]$ au acelaşi mijloc;

b) $[RE] \equiv [SF]$;

c) Punctele S, M, R sunt coliniare.

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

a) $[AC] \equiv [BD]$ ……….1 punct

$[AM] \equiv [BM] \Rightarrow M$ este mijlocul segmentului $[AB]$ ……….1 punct

b) $\triangle ADE \equiv \triangle BCF\ (C.C.) \Rightarrow \sphericalangle E \equiv \sphericalangle F$ ……….1 punct

$\triangle DRE \equiv \triangle CSF\ (C.C.) \Rightarrow [RE] \equiv [SF]$ ……….1 punct

c) $\sphericalangle RDE \equiv \sphericalangle SCF$ ……….1 punct

$\triangle RDM \equiv \triangle SCM\ (L.U.L) \Rightarrow \sphericalangle DMR \equiv \sphericalangle CMS$ ……….1 punct

$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle DMR \equiv \sphericalangle CMS \\ C, M, D \text{ sunt coliniare} \\ CD \text{ separă punctele } R \text{ şi } S \end{array}\right\} \Rightarrow R, M, S \text{ sunt coliniare}.$$ ……….1 punct

Notă: Orice altă soluţie se punctează corespunzător.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2013
CLASA a VI-a

SUBIECTUL al III-lea

Fie un triunghi VAL, dreptunghic în V, cu $VA < VL$. Fie E, C, M mijloacele segmentelor $[AL], [EL]$, respectiv, $[VE]$. Mediatoarele segmentelor $[VE]$ şi $[EL]$ se intersectează în I.
Fie $IC \cap VL = \{R\}$. Se ştie că $\sphericalangle REL \equiv \sphericalangle EVL$. Să se arate că:

a) $\sphericalangle REL \equiv \sphericalangle RLE$;

b) Triunghiul VIL este isoscel;

c) IE este mediatoarea segmentului $[MC]$.

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

a) RC este mediatoarea segmentului $[EL] \Rightarrow d(R;E) = d(R;L)$ ……….1 punct

$\triangle REL$ este isoscel de bază $[EL] \Rightarrow \sphericalangle REL \equiv \sphericalangle RLE$. ……….1 punct

b) IC este mediatoarea segmentului $[EL] \Rightarrow d(I;E) = d(I;L)$

IM este mediatoarea segmentului $[VE] \Rightarrow d(I;E) = d(I;V)$ ……….1 punct

$$\left.\begin{array}{l} d(I;E) = d(I;L) \\ d(I;E) = d(I;V) \end{array}\right\} \Rightarrow d(I;V) = d(I;L) \Rightarrow IV = IL \Rightarrow [IV] \equiv [IL] \Rightarrow \triangle IVL \text{ este isoscel}$$

de bază $[VL]$. ……….1 punct

c) $\sphericalangle IVM \equiv \sphericalangle ILC$ ……….1 punct

$\triangle IVM \equiv \triangle ILC\,(I.U.) \Rightarrow [IM] \equiv [IL] \Rightarrow IM = IL \Rightarrow d(I;M) = d(I;C)$ ……….1 punct

$$\left.\begin{array}{l} d(I;M) = d(I;C) \\ d(E;M) = d(E;C) \end{array}\right\} \Rightarrow IE \text{ este mediatoarea segmentului } [MC].$$ ……….1 punct

.

Notă: Orice altă soluţie se punctează corespunzător.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2013
CLASA a VI-a

SUBIECTUL al IV-lea

Spunem că o mulţime X de numere naturale are proprietatea (P), dacă suma oricăror trei elemente din X este un număr prim.

a) Arătaţi că mulţimea $\{11;29;49;59\}$ nu are proprietatea (P).

b) Daţi un exemplu de mulţime cu proprietatea (P), de forma $A=\{5;7;a;b\}$.

c) Arătaţi că nu există mulţimi X cu proprietatea (P), astfel încât $card\ X \geq 5$.

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

a) De exemplu: $11+29+59$ ……….1 punct

$11+29+59=99 \vdots 3 \Rightarrow 99$ nu este prim $\Rightarrow$ mulţimea $\{11;29;49;59\}$ nu are proprietatea (P). ….1 punct

Observaţie: Nu este singurul exemplu!

b) Un exemplu de mulţime cu proprietatea (P), de forma $A=\{5;7;a;b\}$ este $\{5;7;11;25\}$. ……….1 punct

$5+7+11=23$, este prim;

$5+7+25=37$, este prim;

$5+11+25=41$, este prim;

$11+7+25=43$, este prim;

Deci $\{5;7;11;25\}$ are proprietatea (P) ……….1 punct

c) Fie A o mulţime cu cel puţin 5 elemente. Împărţind elementele din A la 3, obţinem un rest, r, cu $r \in \{0;1;2\}$. Aplicând principiul cutiei, există cel puţin 3 elemente care dau acelaşi rest la împărţirea cu 3 sau există 3 elemente care dau resturi diferite două câte două la împărţirea cu 3. ……….1 punct

Dacă există 3 elemente care dau acelaşi rest la împărţirea cu 3, atunci suma lor este mai mare ca 3, este divitibilă cu 3, deci nu este număr prim. ……….1 punct

Dacă există 3 elemente care dau resturi diferite două câte două la împărţirea cu 3, atunci suma lor este mai mare ca 3, este divitibilă cu 3, deci nu este număr prim.

În cocluzie, nu există o mulţime X cu proprietatea (P), astfel încât $card\ X \geq 5$. …….1 punct

Notă: Orice altă soluţie se punctează corespunzător.