OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală - 20.02.2016
Clasa a VII-a

1) **a)** Calculaţi : $A=\sqrt{a^4}-\sqrt{16a^2}-\left|a^2+5\right|-\sqrt{(-a)^2}+\sqrt{(5a-5)^2}$, ştiind că $|a|+a=0$ şi $a\in\mathbf{R}$.

b) Arătaţi că numărul N este pătrat perfect pentru orice $n\in\mathbf{N}$, unde

$$N=\left[\left(8+3\sqrt{7}\right)^{2n+1}+\frac{7}{\left(8-3\sqrt{7}\right)^{2n+1}}\right]\cdot\frac{\left(16-6\sqrt{7}\right)^{2n+2}}{2^{2n+3}}-4\cdot\left(1\frac{3}{4}-\sqrt{63}\right).$$

2) **a)** Rezolvaţi în mulţimea numerelor întregi ecuaţia: $\frac{1}{x}+\frac{2}{3y}=-1$.

b) Calculaţi partea întreagă a numărului $a=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}...+\frac{1}{2016^2}$.

3) Pe laturile triunghiului oarecare ABC se construiesc triunghiurile echilaterale ABD (D şi C de o parte şi de alta a dreptei AB), ACE (E şi B de o parte şi de alta a dreptei AC) şi BCF (F şi A de aceeaşi parte a dreptei BC). Notăm cu M, N, P mijloacele segmentelor $[AB]$, $[AC]$, respectiv $[DE]$.

a) Arătaţi că punctele A, P, F sunt coliniare.

b) Demonstraţi că triunghiul MNP este echilateral.

Gazeta Matematică 10/2015

4) În triunghiul ABC dreptunghic în A se duce înălţimea AD, $D\in(BC)$. Fie $P\in(AD)$ şi $Q\in(DC)$ încât $\frac{AP}{PD}=\frac{QC}{QD}$. Demonstraţi că $BP\perp AQ$.

Subiectele au fost propuse de:
Prof. Gicuţa Dochioiu – Şc. "Duiliu Zamfirescu " Focşani
Prof. Ioan Ciucur - Şc. Gimnazială „Mareșal Averescu" Adjud

NOTĂ: **Timp de lucru: 3 ore.**
Fiecare subiect este notat de la 0 puncte la 7 puncte.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 20.02.2016

Clasa a VII-a

Barem de corectare şi notare

1. a) $|a| = -a \Rightarrow a \le 0$ 1p

A=$|a^2| - |4a| - (a^2+5) - |-a| + |5a-5| = a^2 - (-4a) - a^2 - 5 - (-a) + (-5a+5) = 0$ 2p

b) $N = \dfrac{8}{\left(8-3\sqrt{7}\right)^{2n+1}} \cdot \dfrac{2^{2n+2}\cdot\left(8-3\sqrt{7}\right)^{2n+2}}{2^{2n+3}} - 4\cdot\left(\dfrac{7}{4} - 3\sqrt{7}\right) =$...3p

$= 4\cdot\left(8-3\sqrt{7}\right) - 7 + 12\sqrt{7} = 25 = 5^2 =$ pătrat perfect...1p

2. a) Condiţii: $x, y \ne 0$ 1p

$y = \dfrac{-2x}{3x+3}, x \ne -1$ (sau $x = \dfrac{-3y}{3y+2}$)..1p

$x, y \in \mathbf{Z}^* \Rightarrow x = -3$ şi $y = -1$ 2p

b) $\dfrac{1}{n^2} < \dfrac{1}{n(n-1)}$, $n \in \mathbf{N}\setminus\{0,1\}$...1p

$a < \dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + ... + \dfrac{1}{2015} - \dfrac{1}{2016} \Rightarrow a < 1 - \dfrac{1}{2016} < 1$ 1p

$0 < a < 1 \Rightarrow [a] = 0$ 1p

3) a) Cazul I . $m(\measuredangle A) \ne 60^\circ$

$$\Delta ABC \underset{LUL}{\equiv} \Delta EFC \begin{cases} AC = EC \\ BC = FC \\ m(\sphericalangle ACB) = m(\sphericalangle FCE) = 60^\circ \pm m(\sphericalangle FCA) \end{cases} \Rightarrow AB = EF \text{ şi } AB = AD \Rightarrow$$

$EF = AD(1)$ (obs: $\pm$ avem în funcţie de măsura $\sphericalangle C >$ sau $<$ 60°; dacă este egală cu 60°, atunci punctele A,F,C sunt coliniare)..2p

$\Delta ABC \equiv \Delta DBF(LUL) \Rightarrow AC = DF$ şi $AC = AE \Rightarrow AE = DF(2)$ 1p

Din (1) şi (2) avem $AEFD$ paralelogram $\Rightarrow$ diagonalele AF *şi* DE se înjumătăţesc în P rezultă punctele A,P,Fsunt coliniare 1p

Cazul II. $m(\measuredangle A) = 60^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle DAE) = 180^\circ$

Din congruenţele de la primul caz avem: $\sphericalangle EFC \equiv \sphericalangle ABC, \sphericalangle DFB \equiv \sphericalangle ACB \Rightarrow$

$m(\sphericalangle DFE) = 180^\circ \Rightarrow D, F, E$ coliniare; dar *D*,*A*,*E* sunt coliniare şi cum *P* este mijlocul lui *DE* $\Rightarrow A, P, F$ sunt coliniare..1p

b) *MN*, *NP*, *PM* sunt linii mijlocii $\Rightarrow MN = \frac{BC}{2}, NP = \frac{FC}{2}, PM = \frac{BF}{2}$ 1p

Cum ΔBFC este echilateral $\Rightarrow \Delta MNP$ este echilateral...1p

4) Deoarece $\frac{AP}{PD} = \frac{CQ}{QD}$, conform reciprocei teoremei lui Thales rezultă că *PQ* // *AC*……………....2p

Dar $AC \perp AB$ de unde rezultă că şi $QP \perp AB$…………………………………………………….2p

Deoarece şi $AP \perp BC \Rightarrow P$ este ortocentrul triunghiului *ABQ* …………………………………....2p

Finalizare : $BP \perp AQ$. ……………………………………………………………………………..1p

NOTĂ. Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.