OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală - 14. 02. 2015
Clasa a VIII – a

PROBLEMA 1. a) Descompuneţi în factori $3x^2 + 4\sqrt{6}x + 8 - y^2$.

b) Aflaţi minimul şi maximul expresiei $\frac{x+1}{|x+1|} + \frac{|x+2|}{x+2} + \frac{x+3}{|x+3|}$, pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, -1\}$.

PROBLEMA 2. Fie $a, b \in \mathbb{N}$, astfel încât $\sqrt{\frac{a+5}{a+12}}, \sqrt{\frac{b+3}{b+14}} \in \mathbb{Q}$. Arătaţi că $a^{2015} + b^{2015}$ nu se divide cu 2015.

PROBLEMA 3. Se consideră pătratul $ABCD$ şi punctul S exterior planului său aşa încât $SA = SB = SC = SD$. Dacă $AB = 12$ cm, $AP \perp CS$, $P \in (SC)$ şi $AP = SO$, unde O este centrul pătratului, se cer:

a) Măsura unghiului format de dreptele SC şi BD;

b) Distanţa de la punctul A la planul (BPD);

c) Distanţa de la punctul B la dreapta de intersecţie a planelor (BPD) şi (ADS).

PROBLEMA 4. Se consideră punctele necoplanare A, B, C şi D. Dacă H este ortocentrul triunghiului ABC, D este ortocentrul triunghiului BCD, iar picioarele perpendicularelor din D şi A pe BC coincid, notând cu E piciorul perpendicularei din A pe BC, să se arate că $HE \cdot AE = DE^2$.

[1]Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2]Toate problemele sunt obligatorii;
[3]Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală - 14. 02. 2015
BAREM DE CORECTARE - Clasa a VIII – a

PROBLEMA 1.

(2p) a) $E = 3x^2 + 4\sqrt{6}x + 8 - y^2 = \left(x\sqrt{3} + 2\sqrt{2}\right)^2 - y^2$;

(2p) Finalizare, $E = \left(x\sqrt{3} + 2\sqrt{2} - y\right)\left(x\sqrt{3} + 2\sqrt{2} + y\right)$.

(1p) b) Fracţiile pot lua doar valorile 1 sau -1

(1p) Minimul expresiei este -3

(1p) Maximul expresiei este 3

PROBLEMA 2.

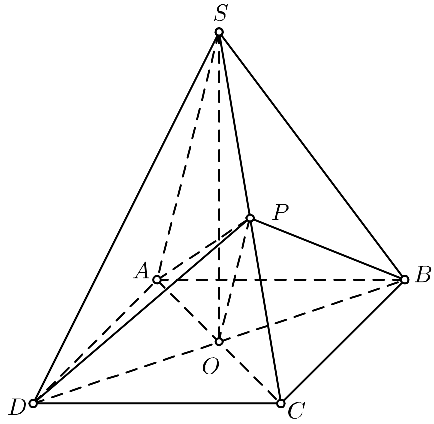
(2p) $\sqrt{\frac{a+5}{a+12}} \in \mathbb{Q} \Rightarrow a + 5 = kx^2$ şi $a + 12 = ky^2$ cu x şi y prime între ele şi $k \in \mathbb{N}$.

(1p) Avem $k(y^2 - x^2) = 7 \Rightarrow k(y - x)(y + x) = 7$ de unde, singura soluţie este $k = 1, y = 4$ şi $x = 3 \Rightarrow a = 4$.

(3p) Analog se găseşte că $b = 22$.

(1p) Ultima cifră a numărului $a^{2015} + b^{2015}$ este 2, de unde rezultă cerinţa

PROBLEMA 3.



(2p) a) $SO \perp (ABC) \Rightarrow SO \perp BD,\ BD \perp AC \Rightarrow BD \perp (SOC) \Rightarrow BD \perp SC \Rightarrow m\left(\widehat{BD, SC}\right) = 90°$

(1p) b) Triunghiurile ΔSAC şi ΔOPC sunt echilaterale

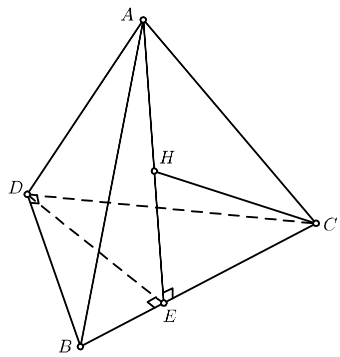
(1p) $d(A,(BPD)) = d(C,(BPD)) = d(C, OP) = 3\sqrt{6}$ cm

(3p) c) OP este linie mijlocie în $\Delta SAC \Rightarrow OP \parallel AS \Rightarrow OP \parallel (ADS)$;

$OP \subset (BPD) \Rightarrow OP \parallel (ADS) \cap (BPD)$;

$BD \perp OP \Rightarrow BD \perp (ADS) \cap (BPD) \Rightarrow d(B,(ADS) \cap (BPD)) = BD = 12\sqrt{2}$cm

PROBLEMA 4.



(1p) ΔBCD este dreptunghic în D

(1p) Deoarece $DE \perp BC$, din teorema înălţimii, rezultă că $DE^2 = BE \cdot CE$

(2p) $\Delta CEH \sim \Delta AEB$

(2p) Rezultă $\dfrac{CE}{AE} = \dfrac{HE}{BE} \Rightarrow BE \cdot CE = HE \cdot AE$

(1p) Deci, $HE \cdot AE = DE^2$

[1]Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;
[2]Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.