Olimpiada de Matematică – faza locală

Subiecte clasa a V-a

Subiectul nr.1

a). Aflați numerele consecutive a,b și c care verifică relația:

$$\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 1332.$$

b). Calculați $a^3 + b^3 + c^3$ cu a, b și c determinați la punctul a) și găsiți (și justificați) care dintre cele două relații este adevărată:

$$\overline{aa}^3 + \overline{bb}^3 + \overline{cc}^3 = 66^3 \qquad \text{sau}$$

$$a \cdot 11^3 + b \cdot 11^3 + c \cdot 11^3 = 6 \cdot 11^3.$$

Subiectul nr.2

a). Să se afle numărul maxim de numere naturale distincte, nenule, a căror sumă este 2016.

b). Să se calculeze câte perechi de numere (a,b), cu a și b naturale, a<b, îndeplinesc condiția

$$a \cdot b = 2016.$$

c). Găsiți căte dintre aceste perechi conțin pe a sau b pătrat perfect.

Subiectul nr.3

Se dă numărul $N = 7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + \cdots + 7^n$, unde n este număr natural diferit de zero.

a). Să se determine cel mai mic n pentru care N se divide cu 100.

b). Aflați ultimele două cifre ale lui N pentru n=2016.

c). Care sunt ultimele două cifre ale lui N dacă n=2018?

Notă: Fiecare subiect este notat cu 7 puncte. Timp de lucru 2 ore.

Olimpiada de Matematică – faza locală

Barem de corectare – Clasa a V-a

Subiectul nr.1		
a).	(a+b+c) $\cdot$111= 1332, 1332=12 $\cdot$ 11	1p
	b=a+1, c=a+2, a+b+c = 3a+3	1p
	a=3, b=4, c=5	1p
b).	27+64+125 = 216	1p
	$(a\cdot 11)^3+(b\cdot 11)^3+(c\cdot 11)^3=(6\cdot 11)^3$	1p
	$6^3=216=a^3+b^3+c^3$	1p
	(a+b+c)$\cdot 11^3$=12$\cdot 11^3 \neq 6\cdot 11^3$	1p
Subiectul nr.2		
a).	Pentru ca nr. să fie maxim vom considera cele mai mici numere naturale distincte 1+2+3+ … + n = 2016 = $\frac{n(n+1)}{2}$	1p
	n(n+1)=4032= 63$\cdot$64, n=63	1p
b).	2016=$2^5\cdot 3^2\cdot 7$, numărul divizorilor este (5+1)(2+1)(1+1)=36	1p
	2016=1$\cdot$ $2016=2\cdot 1008=3\cdot 504=\cdots.=42\cdot 48$ Produsul dintre a și b este produsul dintre divizorii ai lui 2016; dacă aceștia sunt așezați în ordine crescătoare, a și b au aceeași poziție față de capete.	2p
	Sunt 18 = 36:2 perechi de numere (a,b)	1p
c).	Din descompunerea în factori primi a lui 2016, putem găsi ca pătrate perfecte $1, 2^2, 3^2, 2^4, (2\cdot 3)^2, (2^2\cdot 3)^2$.	1p
	Întrucât 2016 nu este pătrat perfect rezultă că doar unul dintre a și b poate fi pătrat perfect, deci sunt 6 perechi.	1p
Subiectul nr.3		
a).	$7+7^2=56, 7+7^2+7^3$=399, $7+7^2+7^3+7^4$= 50$\cdot 56=2800$. Prin urmare cel mai mic n este n=4.	2p
b).	N se poate grupa în paranteze de câte 4 termeni pentru că 2016 este multiplu de 4: N = $(7+7^2+7^3+7^4)+7^4(7+7^2+7^3+7^4)+\cdots+7^{2012}(7+7^2+7^3+7^4)$= 2800 $(1+7^4+\cdots+7^{2012})$	2p
	N este multiplu de 100, deci ultimele două cifre ale sale sunt egale cu zero.	1p
c).	N = $7+7^2+7^2(7+7^2+7^3+7^4)+7^6(7+7^2+7^3+7^4)+\ldots+7^{2014}(7+7^2+7^3+7^4)$	1p
	N = 56 + 2800 $(7^2+7^6+\cdots+7^{2014})$. Ultimele două cifre ale lui N sunt date de restul împărțirii lui N la 100, adică 56.	1p