OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 16 FEBRUARIE 2014

Clasa a VIII-a

Problema 1. Arătaţi că pentru orice numere reale a, b, c are loc inegalitatea:

$$\sqrt{(a+1)^2+(b+1)^2}+\sqrt{(b+1)^2+(c+1)^2}+\sqrt{(c+1)^2+(a+1)^2}\geq\sqrt{2}\cdot(a+b+c+3).$$

Gazeta Matematică nr. 11/2013

Problema 2. Determinaţi numerele naturale x, y care verifică relaţia:

$$x^3+28x^2+96x=5^y\ .$$

Luigi Catană, Potcoava

Problema 3. Se consideră numerele reale $x, y\in(2012, 2014)$ şi numărul

$$a=xy-2013x-2013y+2013\cdot 2014.$$

Arătaţi că $a\in(2012, 2014)$.

Nicolae Tomescu, Corabia

Problema 4. Fie patrulaterul inscriptibil $ABCD$, în care lungimile $AB=a$, $BD=b$, $DA=d$, ale laturilor triunghiului ABD, sunt în relaţia $a^2+b^2+d^2=ab+bd+da$, iar $AC=\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

În punctul C se ridică perpendiculara CM pe planul (ABC) astfel încât $CM=\frac{1}{2}AC$.

a) Arătaţi că $AC\neq BD$.

b) Calculaţi distanţa de la punctul C la planul (MAB).

c) Determinaţi sinusul unghiului diedru format de planele (MAC) şi (MAB).

Nicolae Bivol,Corabia

NOTĂ. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 16 FEBRUARIE 2014

Clasa a VIII-a

Soluţii şi bareme de corectare

Barem de corectare:

1. $\sqrt{(a+1)^2+(b+1)^2} \geq \sqrt{2}\cdot\frac{a+1+b+1}{2}=\sqrt{2}\cdot\frac{a+b+2}{2}$ 2p

$\sqrt{(b+1)^2+(c+1)^2} \geq \sqrt{2}\cdot\frac{b+1+c+1}{2}=\sqrt{2}\cdot\frac{c+b+2}{2}$ 2p

$\sqrt{(a+1)^2+(c+1)^2} \geq \sqrt{2}\cdot\frac{a+1+c+1}{2}=\sqrt{2}\cdot\frac{c+a+2}{2}$ 2p

$\sqrt{(a+1)^2+(b+1)^2}+\sqrt{(b+1)^2+(c+1)^2}+\sqrt{(a+1)^2+(c+1)^2} \geq$

$\sqrt{2}\left(\cdot\frac{a+b+2}{2}+\cdot\frac{c+b+2}{2}+\cdot\frac{c+a+2}{2}\right)=\sqrt{2}$ (a+b+c+3)............................1p

2. $X^3+28x^2+96x=x(x^2+28x+96)=x(x+4)(x+24)$..................................3p
   Notam: $x=5^u$, $x+4=5^v$, $x+24=5^t$ si $u+v+t=y$......................................1p
   Din $x+4-x=5^v-5^u$ avem $5^u(5^{u-v}-1)=4$..1p
   Cum 5^u impar, avem $5^u=1$, de unde u=0 si x=1................................1p
   Din $5^y=5^3$ avem y=3, deci solutie x=1,y=3 ....1p

3. Din $x\in(2012;2014)\Leftrightarrow 2012<x<2014\Leftrightarrow -1<x-2013<1\Leftrightarrow |x-2013|<1$
   si analog |y-2013|<1...2p
   $|x-2013||y-2013|<1\Leftrightarrow |(x-2013)(y-2013)|<1\Leftrightarrow |xy-2013x-2013y+2013^2|<1\Leftrightarrow -1< xy-2013x-2013y+2013^2<1\Leftrightarrow$......................2p
   $2012< xy-2013x-2013y+2013^2+2013<2014\Leftrightarrow$........................1p
   $2012< xy-2013x-2013y+2013(2013+1)<2014\Leftrightarrow$......................1p
   $2012< xy-2013x-2013y+2013.2014<2014\Leftrightarrow 2012<a<2014\Leftrightarrow$
   $a\in(2012;2014)$..1p

4.

a) laturile Δ BAD sunt in relatia: $a^2+b^2+d^2=ab+ad+bd\Leftrightarrow$
   $(a-b)^2+(a-d)^2+(b-d)^2=0\Leftrightarrow a=b=d\Leftrightarrow \Delta ABD$ *echilateral*..........(1p)
   din ABCD patrulater inscriptibil, cu teorema I a lui Ptolemeu avem:

$AC \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot CD \Leftrightarrow AC \cdot a = a \cdot BC + a \cdot CD \Leftrightarrow AC = BC + CD.$

Daca prin absurd AC=BD atunci BD=BC+CD in ΔBCD, ceea ce contrazice existenta triunghiului, deci presupunerea facuta este falsa, atunci AC≠BD……………………………………………………………………….(2p).

b) ΔBAD este echilateral inscris in acelasi cerc ca si patrulaterul ABCD.

Fie O centrul acestui cerc si OA raza sa. Atunci, daca AB=a, OA=$\frac{a\sqrt{3}}{3}$, de unde diametrul este $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. Dar AC=$\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. iar diametrul este coarda maxima intr-un cerc $\Rightarrow$AC diametrul cercului……………………………………..(1p).

Din [AC] diametru$\Rightarrow$BC=CD=$\frac{a\sqrt{3}}{3}$, si m($\angle ABC) = 90^\circ$.

Atunci din $CM \perp (ABC), CB \perp BA, BA \subset (ABC) \Rightarrow MB \perp BA.$

Atunci din: $AB \perp BC\ si\ AB \perp MB \Rightarrow AB \perp (MBC)\ si\ AB \subset (MAB) \Rightarrow (MBC) \perp (MAB)$ ….(1p)

Din CQ$\perp MB, CQ \subset (CMB), MB = (CMB) \cap (CMA) \Rightarrow CQ \perp (CMA) \Rightarrow$

d(C,(CMA))=CQ=$\frac{CM \cdot CB}{MB} = \frac{CB^2}{CB\sqrt{2}} = \frac{CB}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$…………………….(1p).

Din $CQ \perp (CMA)\ si\ QT \perp MA \Rightarrow CT \perp MA \Rightarrow m(\angle(MAC),(MAB)) = m(\angle CTQ)$

In

$$\Delta CQT,\ m(\angle CQT) = 90^\circ,\ \sin(\angle CTQ) = \frac{CQ}{CT} = \frac{\frac{CM \cdot CB}{MB}}{\frac{CM \cdot CA}{MA}} = \frac{\frac{CB}{MB}}{\frac{2 \cdot CB}{MA}} = \frac{MA}{2 \cdot MB} = \frac{CB\sqrt{5}}{2CB\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

…(1p)