

## OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 16 FEBRUARIE 2014

## Clasa a VIII-a

**Problema 1.** Arătați că pentru orice numere reale  $a, b, c$  are loc inegalitatea:

$$\sqrt{(a+1)^2 + (b+1)^2} + \sqrt{(b+1)^2 + (c+1)^2} + \sqrt{(c+1)^2 + (a+1)^2} \geq \sqrt{2} \cdot (a+b+c+3).$$

*Gazeta Matematică nr. 11/2013*

**Problema 2.** Determinați numerele naturale  $x, y$  care verifică relația:

$$x^3 + 28x^2 + 96x = 5^y.$$

*Luigi Catană, Potcoava*

**Problema 3.** Se consideră numerele reale  $x, y \in (2012, 2014)$  și numărul

$$a = xy - 2013x - 2013y + 2013 \cdot 2014.$$

Arătați că  $a \in (2012, 2014)$ .

*Nicolae Tomescu, Corabia*

**Problema 4.** Fie patrulaterul inscriptibil  $ABCD$ , în care lungimile  $AB = a$ ,  $BD = b$ ,  $DA = d$ , ale laturilor triunghiului  $ABD$ , sunt în relația  $a^2 + b^2 + d^2 = ab + bd + da$ , iar  $AC = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$ .

În punctul  $C$  se ridică perpendiculara  $CM$  pe planul  $(ABC)$  astfel încât  $CM = \frac{1}{2}AC$ .

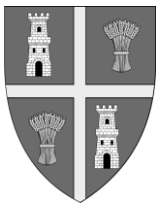
a) Arătați că  $AC \neq BD$ .

b) Calculați distanța de la punctul  $C$  la planul  $(MAB)$ .

c) Determinați sinusul unghiului diedru format de planele  $(MAC)$  și  $(MAB)$ .

*Nicolae Bivol, Corabia*

**NOTĂ.** Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**

ETAPA LOCALĂ - 16 FEBRUARIE 2014

Clasa a VIII-a

Soluții și bareme de corectare

Barem de corectare:

$$1. \sqrt{(a+1)^2 + (b+1)^2} \geq \sqrt{2} \cdot \frac{a+1+b+1}{2} = \sqrt{2} \cdot \frac{a+b+2}{2} \dots\dots\dots 2p$$

$$\sqrt{(b+1)^2 + (c+1)^2} \geq \sqrt{2} \cdot \frac{b+1+c+1}{2} = \sqrt{2} \cdot \frac{c+b+2}{2} \dots\dots\dots 2p$$

$$\sqrt{(a+1)^2 + (c+1)^2} \geq \sqrt{2} \cdot \frac{a+1+c+1}{2} = \sqrt{2} \cdot \frac{c+a+2}{2} \dots\dots\dots 2p$$

$$\sqrt{(a+1)^2 + (b+1)^2} + \sqrt{(b+1)^2 + (c+1)^2} + \sqrt{(a+1)^2 + (c+1)^2} \geq \sqrt{2} \left( \frac{a+b+2}{2} + \frac{c+b+2}{2} + \frac{c+a+2}{2} \right) = \sqrt{2} (a+b+c+3) \dots\dots\dots 1p$$

$$2. X^3+28x^2+96x=x(x^2+28x+96)=x(x+4)(x+24) \dots\dots\dots 3p$$

Notam:  $x=5^u$ ,  $x+4=5^v$ ,  $x+24=5^t$  si  $u+v+t=y$ ..... 1pDin  $x+4-x=5^v-5^u$  avem  $5^u(5^{u-v}-1)=4$ ..... 1pCum  $5^u$  impar, avem  $5^u=1$ , de unde  $u=0$  si  $x=1$ ..... 1pDin  $5^y=5^3$  avem  $y=3$ , deci solutie  $x=1, y=3$  ..... 1p

$$3. \text{ Din } x \in (2012; 2014) \Leftrightarrow 2012 < x < 2014 \Leftrightarrow -1 < x - 2013 < 1 \Leftrightarrow |x - 2013| < 1$$

si analog  $|y-2013| < 1$ ..... 2p

$$|x-2013||y-2013| < 1 \Leftrightarrow |(x-2013)(y-2013)| < 1 \Leftrightarrow |xy - 2013x - 2013y +$$

$$2013^2| < 1 \Leftrightarrow -1 < xy - 2013x - 2013y + 2013^2 < 1 \Leftrightarrow \dots\dots\dots 2p$$

$$2012 < xy - 2013x - 2013y + 2013^2 + 2013 < 2014 \Leftrightarrow \dots\dots\dots 1p$$

$$2012 < xy - 2013x - 2013y + 2013(2013 + 1) < 2014 \Leftrightarrow \dots\dots\dots 1p$$

$$2012 < xy - 2013x - 2013y + 2013 \cdot 2014 < 2014 \Leftrightarrow 2012 < a < 2014 \Leftrightarrow$$

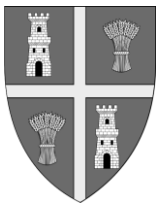
$$a \in (2012; 2014) \dots\dots\dots 1p$$

4.

a) laturile  $\triangle BAD$  sunt in relatia:  $a^2+b^2+d^2=ab+ad+bd \Leftrightarrow$ 

$$(a-b)^2 + (a-d)^2 + (b-d)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = d \Leftrightarrow \triangle ABD \text{ echilateral} \dots\dots\dots (1p)$$

din ABCD patrulater inscriptibil, cu teorema I a lui Ptolemeu avem:



$$AC \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot CD \Leftrightarrow AC \cdot a = a \cdot BC + a \cdot CD \Leftrightarrow AC = BC + CD.$$

Daca prin absurd  $AC=BD$  atunci  $BD=BC+CD$  in  $\triangle BCD$ , ceea ce contrazice existenta triunghiului, deci presupunerea facuta este falsa, atunci

$$AC \neq BD \dots \dots \dots (2p).$$

b)  $\triangle BAD$  este echilateral inscris in același cerc ca și patrulaterul  $ABCD$ .

Fie  $O$  centrul acestui cerc și  $OA$  raza sa. Atunci, dacă  $AB=a$ ,  $OA=\frac{a\sqrt{3}}{3}$ , de unde

diametrul este  $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ . Dar  $AC=\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ . iar diametrul este coarda maxima intr-un cerc

$\Rightarrow AC$  diametrul cercului.....( 1p).

Din  $[AC]$  diametru  $\Rightarrow BC=CD=\frac{a\sqrt{3}}{3}$ , și  $m(\angle ABC) = 90^\circ$ .

Atunci din  $CM \perp (ABC)$ ,  $CB \perp BA$ ,  $BA \subset (ABC) \Rightarrow MB \perp BA$ .

Atunci din:  $AB \perp BC$  și  $AB \perp MB \Rightarrow AB \perp (MBC)$  și  $AB \subset (MAB) \Rightarrow (MBC) \perp (MAB)$

....( 1p)

Din  $CQ \perp MB$ ,  $CQ \subset (CMB)$ ,  $MB = (CMB) \cap (CMA) \Rightarrow CQ \perp (CMA) \Rightarrow$

$$d(C, (CMA)) = CQ = \frac{CM \cdot CB}{MB} = \frac{CB^2}{CB\sqrt{2}} = \frac{CB}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{6} \dots \dots \dots (1p).$$

Din  $CQ \perp (CMA)$  și  $QT \perp MA \Rightarrow CT \perp MA \Rightarrow m(\angle(MAC), (MAB)) = m(\angle CTQ)$

In

$$\triangle CQT, m(\angle CQT) = 90^\circ, \sin(\angle CTQ) = \frac{CQ}{CT} = \frac{\frac{CM \cdot CB}{MB}}{\frac{CM \cdot CA}{MA}} = \frac{\frac{CB}{MB}}{\frac{2 \cdot CB}{MA}} = \frac{MA}{2 \cdot MB} = \frac{CB\sqrt{5}}{2CB\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

...( 1p)