INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN PRAHOVA

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ, 15.02.2015 –
CLASA A XII-A
Subiecte

1. Calculați $I = \int \frac{tgx - 1}{tgx + \sin x + 1} dx$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Prof. Claudiu Militaru, Ploiești

2. Fie $A = \begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{2} \\ \hat{2} & \hat{3} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_5)$. Determinați matricele $X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_5)$ știind că $X^4 = A$.

Prof. Petre și Cătălin Năchilă, Ploiești

3. Se consideră șirurile $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^4+1} dx$ și $(E_n)_{n\geq 1}$, $E_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(8k+1)(8k+5)}$.

a) Calculați I_0 și I_8

b) Arătați că $\frac{1}{2n+2} \leq I_n \leq \frac{1}{2n-2}$, oricare ar fi n număr natural, $n \geq 2$.

c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} E_n$.

4. a) Fie $f : [0,1] \to (0,\infty)$ o funcție continuă și $(a_n)_{n\geq 1}$ un șir definit astfel:

$a_n = \int_0^1 f^n(x) dx$, oricare ar fi n număr natural nenul. Arătați că $(a_n)_{n\geq 1}$ are limită.

b) Arătați că oricare ar fi $\alpha \in [0,1]$ există o funcție continuă $f_\alpha : [0,1] \to [0,\infty)$

astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_\alpha^n(x) dx = \alpha$.

Prof. Emil Vasile, Ploiești

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.