OLIMPADA DE MATEMATICA
ETAPA LOCALĂ
23 februarie 2014

CLASA A XI-A
Programa M1

1.) Să se arate că $\begin{vmatrix} 1! & 2! & 3! & ... & n! \\ 2! & 2! & 3! & ... & n! \\ 3! & 3! & 3! & ... & n! \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ n! & n! & n! & ... & n! \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1)!(1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot ...n!),\quad n\in\mathbb{N}^*$.

2.) **a.)** Se dă matricea $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$ şi fie $X=A^4+5A^2+4I_2$.

Calculaţi determinantul matricii *X*.

b.) Să se demonstreze că pentru orice matrice $A\in M_n(\mathbb{R}), n\in\mathbb{N}, n\geq 2$ determinantul matricii $X=A^4+5A^2+4I_n$ este un număr real nenegativ.

3.) Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ astfel încât: $a_n=a+n+1-\sum_{k=1}^{n}\frac{k^4+k^2+1}{k^4+k}$, $a\in\mathbb{R}$.

a.) Să se arate că acest șir este convergent.

b.) Să se găsească rangul *n* de la care avem $|a_n-a|\leq 0{,}01$.

4.) **a.)** Există un șir $(x_n)_{n\in N}$ astfel încât $x_{n+1}-x_n+x_n^2=0, \forall n\in\mathbb{N}$ și $x_{2014}=1$, cu $x_0\in\mathbb{R}$?

b.) Calculaţi următoarea limită: $\lim_{n\to\infty}\cos\left(C_n^2\pi\right)$

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se punctează cu 10 puncte.

Timp de lucru 3 ore

OLIMPADA DE MATEMATICA

ETAPA LOCALĂ

23 februarie 2014

BAREM

CLASA A XI-A

Programa M1

1.	**Din oficiu**	**1p**
	Scădem linia întâi din celelalte.	**3p**
	Dezvoltăm determinantul după elementele ultimei coloane.	**2p**
	În determinantul obținut aplicăm relația $p!-(p-1)!=(p-1)(p-1)!$ pentru elementele de pe diagonala principală.	**2p**
	Scriem rezultatul final observând că elementele de o parte a diagonalei principale sunt nule.	**2p**

2.	**Din oficiu**	**1p**
a.)	$A^2=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $A^4=\begin{pmatrix}5 & -3\\ -3 & 2\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}19 & -8\\ -8 & 11\end{pmatrix}$ și $\det X=145$	**2p**
b.)	$X=A^4+5A^2+4I_n=(A^2+I_n)(A^2+4I_n)\Rightarrow \det X=\det(A^2+I_n)\cdot\det(A^2+4I_n)$	**2p**
	Însă $\det(A^2+I_n)=\det(A+iI_n)\cdot\det(A-iI_n)=(a+ib)(a-ib)=a^2+b^2\geq 0$ pentru orice $a,b\in R$.	**2p**
	Analog $\det(A^2+4I_n)=\det(A+2iI_n)\cdot\det(A-2iI_n)=(c+id)(c-id)=c^2+d^2\geq 0$ pentru orice $c,d\in R$.	**1p**
	Deci $\det X\geq 0$ pentru orice $A\in M_n(R), n\in N, n\geq 2$.	**2p**

3.	**Din oficiu**	**1p**
a.)	Avem $\dfrac{k^4+k^2+1}{k^4+k}=\dfrac{k^4+k+k^2-k+1}{k(k+1)(k^2-k+1)}=1+\dfrac{1}{k(k+1)}=1+\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$.	**3p**
	Prin urmare $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k^4+k^2+1}{k^4+k}=n+1-\dfrac{1}{n+1}$.	**2p**
	De unde obținem $a_n=a+n+1-n-1+\dfrac{1}{n+1}=a+\dfrac{1}{n+1}$.	**1p**
	Astfel $\lim\limits_{x\to\infty} a_n=a\in \boldsymbol{R}$, deci șirul este convergent.	**1p**
b.)	Deoarece $a_n-a=\dfrac{1}{n+1}$, are loc $\lvert a_n-a\rvert\leq 0{,}01\Leftrightarrow \dfrac{1}{n+1}\leq\dfrac{1}{100}\Leftrightarrow n\geq 99$	**1p**
	Deci termenul cerut în enunț este $a_{99}=a+\dfrac{1}{100}$.	**1p**

4.	**Din oficiu**	**1p**
a.)	Din $x_{n+1}-x_n+x_n^2=0$ rezultă $x_{n+1}=x_n(1-x_n), \forall n\in \boldsymbol{N}$	**1p**
	Dacă $x_0\in(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$ atunci evident $x_n\leq 0, \forall n\in \boldsymbol{N}$, deci nu este posibil ca $x_{2014}=1$.	**1p**
	Dacă $x_0\in(0,1)$ atunci evident $x_n\in(0,1), \forall n\in \boldsymbol{N}$, deci nu este posibil ca $x_{2014}=1$.	**1p**
	Rezultă că nu există șiruri cu proprietatea din enunț.	**1p**

b.)	Fie $a_n = \cos\left(C_n^2 \pi\right)$. Rezultă că $a_{4n} = \cos\left(C_{4n}^2 \pi\right) = \cos\left(2n(4n-1)\pi\right) = 1$ pentru $\forall n \in N^* \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_{4n} = 1$.	**2p**
	Însă $a_{4n+2} = \cos\left(C_{4n+2}^2 \pi\right) = \cos(2n+1)(4n+1)\pi = -1$ pentru $\forall n \in N^* \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_{4n+2} = -1$	**2p**
	Deci şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ are două subşiruri cu limite diferite, deci şirul respectiv nu are limită.	**1p**