MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII
COLEGIUL NAȚIONAL “AL. I. CUZA”

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală -februarie 2013

Clasa a XII-a, M1

1. Fie mulțimea $M=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 7b & a \end{pmatrix} / a,b\in\mathbb{Z}\right\}$.

a) Demonstrați că $(M,\cdot)$ este monoid;

b) Demonstrați că M are o infinitate de elemente inversabile.

2. Determinați primitivele funcțiilor:

a) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$;

b) $g:\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{\sin x+2\cos x}{2\sin x+\cos x}$.

3. Se dau funcțiile $f,F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Ştiind că F este o primitivă a lui f, demonstrați că f este funcție impară dacă şi numai dacă F este funcție pară.

4. Fie $A(+,\cdot)$ un inel şi $a,b\in A$ cu proprietatea că $a^2+b^2=ab$. Să se arate că $(ab)^2=b^2a^2$ şi $(ba)^2=a^2b^2$.

Clasa a XII-a, M1

Bareme

1. a) Se verifică axiomele monoidului..3p

   b) Cum $A=\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 7\cdot 3 & 8 \end{pmatrix}\in M$, atunci $A^n\in M, \forall n\in \mathbb{N}$ 2p

   Mulțimea $\{A^n / n\in \mathbb{N}\}\subset M$ este infinită, deducem că M este infinită...2p

2. a)

   $$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}dx=\int \frac{1+\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x}}dx=\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx+\frac{1}{2}\int 1dx-\frac{1}{2}\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}}dx$$ ...2p

   Finalizare...2p

   b) Fie $A=\int \frac{\sin x}{2\sin x+\cos x}dx, B=\int \frac{\cos x}{2\sin x+\cos x}dx$.

   $2A+B=\int 1dx=x+C$ 1p

   Pe de altă parte,

   $-A+2B=\ln(2\sin x+\cos x)+C$ 1p

   Finalizare..1p

3. ($\Leftarrow$)F pară,

   $F(-x)=F(x)\Rightarrow -F'(-x)=F'(x)\Rightarrow -f(-x)=f(x)\Rightarrow$ f impară....................3p

   ($\Rightarrow$) f impară,

   $f(-x)=-f(x)\Rightarrow (F(-x)-F(x))'=0, \forall x\in \mathbb{R} \Rightarrow \exists c\in \mathbb{R}$ $a.î.\ F(-x)-F(x)=c$ şi

   din $x=0\Rightarrow c=0$, ceea ce încheie problema...4p

4. Din $a^2+b^2=ab\Rightarrow$ $a^3+ab^2=a^2b$ şi $a^2b+b^3=ab^2$

   de unde, prin adunare, se obține $a^3+b^3=0$ 2p

   Tot $a^2+b^2=ab\Rightarrow$ $a^4+a^2b^2=a^3b$ şi $a^2b^2=-a^4-b^4$ (1)

   $a^2+b^2=ab\Rightarrow$ $b(a^2+b^2)a=baba\Rightarrow$ $ba^3+ab^3=(ba)^2$ (2)

   $a^3+b^3=0$ $\Rightarrow$ $ba^3+ab^3=-b^4-a^4$ (3)

Din (1), (2) şi (3) $\Rightarrow$ $(ba)^2 = a^2b^2$ 3p

Pe de altă parte, $(ab)^2 = \left(a^2 + b^2\right)^2 = a^4 + b^4 + a^2b^2 + b^2a^2$ şi (1) implică $(ab)^2 = b^2a^2$ 2p

.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN VRANCEA

COLEGIUL TEHNIC “EDMOND NICOLAU”

Str. 1 Decembrie 1918, nr. 10, tel: 0237/213784 Focsani-Vrancea

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

CLASA a XII-a MATEMATICĂ – INFORMATICĂ

SUBIECTUL I

Fie $f: [0,1] \to [0,\infty)$ continua si crescatoare.

Sa se demonstreze ca:

$$\frac{1}{2013}\int_0^1 f(x)dx \leq \int_0^1 x^{2012} f(x^{2012})dx \leq \frac{1}{2012}\int_0^1 f(x)dx$$

SUBIECTUL II

a)Sa se demonstreze ca

$$arctg\, x + arctg\, \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}, \forall x > 0$$

b) Sa se calculeze

$$I = \int_{\frac{1}{4}}^{4} \frac{(x+1)arctg\, x}{x\sqrt{x^2+1}}dx$$

SUBIECTUL III

Sa se calculeze:

$$\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{1}{1+sin\sqrt{x}+cos\sqrt{x}}dx$$

G.M.Nr.4 2011

SUBIECTUL IV

Fie $G = (-1-a, 1+a), a > 0$ si $x * y = \frac{(x+y)(1+a)^2}{xy+(1+a)^2}, \forall\, x, y \in G$.

a) Sa se demonstreze ca $(G,*)$ este grup abelian
b) Daca $\alpha = \frac{1+a}{2}$ sa se calculeze $\underbrace{\alpha * \alpha * \ldots * \alpha}_{2013\ ori}$

Subiecte prelucrate de Prof. Cenţa Răvaş

BAREM CLASA a XII-a MATE – INFO.

SUBIECTUL I

$(\forall)x \in [0,1]$ avem $x^{2013} \leq x^{2012} \leq x^{2011}$ deci

$f(x^{2013}) \leq f(x^{2012}) \leq f(x^{2011})$ (2 p)

Obtinem

$\int_0^1 x^{2012} f(x^{2013})dx \leq \int_0^1 x^{2012} f(x^{2012})dx \leq \int_0^1 x^{2011} f(x^{2012})dx$ (2 p)

De unde

$\frac{1}{2013}\int_0^1 (x^{2013})' f(x^{2013})dx \leq \int_0^1 x^{2012} f(x^{2012})dx \leq \frac{1}{2012}\int_0^1 (x^{2012})' f(x^{2012})dx$ (2 p)

Finalizam

$\frac{1}{2013}\int_0^1 f(x)dx \leq \int_0^1 x^{2012} f(x^{2012})dx \leq \frac{1}{2012}\int_0^1 f(x)dx$ (1 p)

SUBIECTUL II

a) Luam $f:(0,\infty) \to R, f(x) = arctg\, x + arctg\, \frac{1}{x}$

$f'(x) = 0 \text{ deci } f(x) = f(1) = \frac{\pi}{2}$ (2 p)

b) Facem substitutia $t = \frac{1}{x} \text{ deci } I = -\int_4^{\frac{1}{4}} \frac{\left(\frac{1}{t}+1\right) arctg \frac{1}{t}}{\frac{1}{t}\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2+1}} \frac{1}{t^2} dt \Rightarrow I = \int_{\frac{1}{4}}^4 \frac{(x+1) arctg \frac{1}{x}}{x\sqrt{x^2+1}} dx$ (2 p)

Obtinem $2I = \frac{\pi}{2}\int_{\frac{1}{4}}^4 \frac{x+1}{x\sqrt{x^2+1}} dx = \frac{\pi}{2}\int_{\frac{1}{4}}^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{x^2\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2+1}} \right) dx$ (1 p)

$I = \frac{\pi}{4}\left(ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) - ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1}\right)\right) /_{\frac{1}{4}}^{4} = \frac{\pi}{2} ln\left(\frac{4(4+\sqrt{17})}{1+\sqrt{17}}\right)$ (2 p)

SUBIECTUL III

$I=\int_0^{\frac{\pi^2}{4}}\frac{1}{1+sin\sqrt{x}+cos\sqrt{x}}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t}{1+sint+cost}dt, t=\sqrt{x}$ (2 p)

$I=-\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{1}{1+\cos x+sinx}dx+2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{x}{1+\cos x+sinx}dx, x=\frac{\pi}{2}-t$(2 p)

Deci

$2I=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cos x+sinx}dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}+\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+tg^2\frac{x}{2}}{1+tg\frac{x}{2}}dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(1+tg\frac{x}{2}\right)'}{1+tg\frac{x}{2}}dx$(2 p)

$I=\frac{\pi}{2}ln\left(1+tg\frac{x}{2}\right)/_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}ln2$(1 p)

SUBIECTUL IV

a) Verificarea axiomelor(3 p)

b) $\alpha*\alpha=\frac{2\alpha(1+\alpha)^2}{\alpha^2+(1+\alpha)^2}=\frac{4}{5}(1+\alpha)=\frac{8}{10}(1+\alpha)=\frac{3^2-1}{3^2+1}(1+\alpha)$ (1 p)

$$\alpha*\alpha*\alpha=\frac{\left(\alpha+\frac{4}{5}(1+\alpha)\right)(1+\alpha)^2}{\alpha\cdot\frac{4}{5}(1+\alpha)+(1+\alpha)^2}=\frac{\left(\frac{1}{2}(1+\alpha)+\frac{4}{5}(1+\alpha)\right)(1+\alpha)^2}{\frac{1}{2}(1+\alpha)\cdot\frac{4}{5}(1+\alpha)+(1+\alpha)^2}=$$

$\frac{13}{14}(1+\alpha)=\frac{26}{28}(1+\alpha)=\frac{3^3-1}{3^3+1}(1+\alpha)$ (1 p)

Se demonstreaza prin inductie ca

$\underbrace{\alpha*\alpha*\ldots*\alpha}_{n\ ori}=\frac{3^n-1}{3^n+1}(1+\alpha)$ (2 p)

OLIMPIADA DE MATEMATICÃ

ETAPA LOCALÃ – ADJUD

9 februarie 2013

Clasa a XII-a

100

2010

Anul Matematicii în

Şcoala Românească

www.anulmatematicii.ro

Subiectul 1.

Fie $(G,\cdot)$ un grup şi e elemental său neutru. Elementele $a, b \in G$ satisfac condi□iia: $a^2 = b^2 = (ab)^2$.
Să se arate că $a^4 = b^4 = e$.

Probleme de structuri algebrice,Ed. Academiei RSR

Subiectul 2.

Fie funcția $f : R \to R$ şi F o primitivă a sa cu proprietatea că $e^{x-F(x)} = F(x)$, oricare ar fi $x \in R$.
Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$.

(Gazeta Matematică , nr.2/2012)

Subiectul 3.

Fie mulțimea $G = (2013;+\infty) - \{2014\}$ pe care definim legea: $x \circ y = 2013 + (x-2013)^{\lg(y-2013)}$,
logaritmul fiind în baza 10. Arătați că:

a) $(G,\circ)$ este grup abelian.

b) Funcția $f : R^* \to G, f(x) = 2013 + 10^x$ este izomorfism de grupuri de la $(R^*,\cdot)$ la $(G,\circ)$.

***

Subiectul 4.

a) Calculați $I = \int \frac{e^x - \cos x}{e^x - \cos x - \sin x} dx$ şi $J = \int \frac{\sin x}{e^x - \cos x - \sin x} dx$, $x > 1$.

b) Calculați $I = \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{e^x + 1} dx$.

(Admitere 2002 Cibernetică)

Subiecte propuse de **:** prof. Munteanu Daniel – Liceul "Emil Botta " Adjud

Barem de corectare şi notare.
Clasa a XII-a --- Liceul "Emil Botta" Adjud
Etapa locală – 9 februarie 2013

Subiectul 1.

$a^2=(ab)^2 \Leftrightarrow a^2=abab \Rightarrow a=bab$ ....(1p)

$b^2=(ab)^2 \Rightarrow b^2=abab \Rightarrow b=aba$ ....(1p)

Atunci $ab=(bab)\cdot(aba) \Leftrightarrow ab=b(aba)ba \Leftrightarrow ab=b^3a$ ....(2p)

Înmulțind la dreapta cu a obținem $aba=b^3a^2 \Leftrightarrow b=b^3a^2 \Rightarrow b^2a^2=e$ ....(2p)

Cum $a^2=b^2$, ultima egalitate se scrie $a^4=e \Leftrightarrow b^4=e$ ....(1p)

Subiectul 2.

Avem $f(x)=F'(x)=e^{x-F(x)}\cdot(1-f(x)), x\in R$ .... (2p)

Deci $f(x)\cdot(1-f(x))=e^{x-F(x)}\cdot(1-f(x))^2 \geq 0$ ....(2p)

Rezultă $f(x)\in[0;1]$, oricare ar fi $x\in R$ .... (2p)

Atunci $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ ....(1p)

Subiectul 3.

a) $(G,\circ)$ este grup abelian....................(4p)

b) f este izomorfism de grupuri ....(3p)

Subiectul 4.

a) $I-J=\int\frac{e^x-\cos x-\sin x}{e^x-cox-\sin x}dx=x+c$ .... (1p)

$I+J=\int\frac{e^x-\cos x+\sin x}{e^x-\cos x-\sin x}dx=\int\frac{(e^x-\cos x-\sin x)'}{e^x-\cos x-\sin x}dx=$

$\ln|e^x-\cos x-\sin x|+c=\ln(e^x-\cos x-\sin x)+c$ ....(2p)

$I=\frac{1}{2}\left[\ln(e^x-\cos x-\sin x)+x\right]+c$, $J=\frac{1}{2}\left[\ln(e^x-\cos x-\sin x)-x\right]+c$ ....(1p)

b) Schimbare de variabilă $y=-x \Rightarrow I=\int_1^{-1}\frac{-y^2}{e^{-y}+1}dy=\int_{-1}^{1}\frac{e^y y^2}{e^y+1}dy$ ....(2p)

Prin nsumare cu integral inițială obținem $2I=\int_{-1}^{1}y^2dy \Rightarrow I=\frac{1}{3}$ ....(1p)