Olimpiada naţională de matematică, faza locală, judeţul Caraş-Severin, 2016

Clasa a VII-a

I. Se consideră numerele raţionale $x \neq -1$, $y \neq -2$ şi $z \neq -3$ care verifică egalitatea:

$$\frac{2016}{x+1}+\frac{2016}{y+2}+\frac{2016}{z+3}=2015.$$

Determinaţi numărul raţional $A=\frac{x-1}{x+1}+\frac{y}{y+2}+\frac{z+1}{z+3}$.

Prof. Feil Heidi, Şcoala Gimnazială Nr. 3 Oţelu Roşu

II. Se consideră mulţimea $M=\left\{a+b\sqrt{2} \mid a,b \in \mathbb{Z}\right\}$. Arătaţi că:

(a) $\sqrt{3+2\sqrt{2}} \in M$;
(b) dacă $x, y \in M$, atunci $x \cdot y \in M$.

***

III. Se consideră un triunghi *ABC* în care se notează cu *I* punctul de intersecţie a bisectoarelor unghiurilor interioare ale triunghiului; punctele *P* şi *Q* sunt picioarele perpendicularelor din *A* pe *BI*, respectiv pe *CI*, iar *R* şi *S* sunt picioarele perpendicularelor duse din *B* şi *C* pe dreptele *CI*, respectiv *BI*.

Arătaţi că:

(a) $\frac{AP}{CS}+\frac{AQ}{BR}>1$; **(b)** $\frac{CS}{AP}+\frac{BR}{AQ}>\frac{BC^2}{AB \cdot AC}$.

Supliment Gazeta Matematică 12/2014

IV. Se consideră un pătrat *ABCD* în care $AC \cap BD=\{O\}$ şi punctele $E \in (BD)$, $Q \in (AC)$, $F \in (DO)$ astfel încât: $\frac{DE}{BD}=\frac{1}{8}$, $\frac{AQ}{AC}=\frac{7}{8}$ şi $\frac{EF}{DO}=\frac{1}{2}$.

a) Arătaţi că patrulaterul *ABQE* este trapez isoscel;

b) Ştiind că $FC \cap AE=\{H\}$ arătaţi că $HO<\frac{AB}{2}$;

Prof. Şandru Marius, Şcoala Gimnazială Nr. 2 Reşiţa

Timp de lucru 3 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Olimpiada naţională de matematică, faza locală, judeţul Caraş-Severin, 2016
Barem de corectare şi notare
Clasa a VII-a

I. Se consideră numerele raţionale $x \neq -1$, $y \neq -2$ şi $z \neq -3$ care verifică egalitatea: $$\frac{2016}{x+1}+\frac{2016}{y+2}+\frac{2016}{z+3}=2015.$$ Determinaţi numărul raţional $A=\frac{x-1}{x+1}+\frac{y}{y+2}+\frac{z+1}{z+3}$.	
$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{z+3}=\frac{2015}{2016}$	2p
$A=\frac{x-1}{x+1}+\frac{y}{y+2}+\frac{z+1}{z+3}=3-2\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{z+3}\right)$	3p
$A=3-\frac{2015}{1008}=\frac{3024-2015}{1008}=\frac{1009}{1008}$	2p
II. Se consideră mulţimea $M=\left\{a+b\sqrt{2} \mid a,b\in\mathbb{Z}\right\}$. Arătaţi că: **(a)** $\sqrt{3+2\sqrt{2}}\in M$; **(b)** dacă $x,y\in M$, atunci $x\cdot y\in M$.	
a) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{2+2\sqrt{2}+1}=\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}=\sqrt{2}+1$, $a=1, b=1 \Rightarrow \sqrt{2}+1\in M$	3p
b) $xy=\left(a+b\sqrt{2}\right)\left(c+d\sqrt{2}\right)=\left(ab+2bd\right)+\left(ad+bc\right)\sqrt{2}$	2p
$ab+2bd\in\mathbb{Z},\ \ ad+bc\in\mathbb{Z}\Rightarrow xy\in M$	2p
III. Se consideră un triunghi *ABC* în care se notează cu *I* punctul de intersecţie a bisectoarelor unghiurilor interioare ale triunghiului; punctele *P* şi *Q* sunt picioarele perpendicularelor din *A* pe *BI*, respectiv pe *CI*, iar *R* şi *S* sunt picioarele perpendicularelor duse din *B* şi *C* pe dreptele *CI*, respectiv *BI*. Arătaţi că: **(a)** $\frac{AP}{CS}+\frac{AQ}{BR}>1$; **(b)** $\frac{CS}{AP}+\frac{BR}{AQ}>\frac{BC^2}{AB\cdot AC}$. *Supliment Gazeta Matematică 12/2014*	

Strada Ateneului Nr. 1, 320112
320112, REŞIŢA – ROMANIA
Tel: 0255/214238; Fax: 0255/216042
e-mail: isjcaras@gmail.com
http://isjcs.ro

Str. General Berthelot nr. 28-30, Sector 1
010168, Bucureşti
Tel: +40 (0)21 405 57 06
Fax: +40 (0)21 310 32 05
www.edu.ro

a) Construcția figurii. $BI \cap AC = \{M\}$, $CI \cap AB = \{N\}$	1p
$\frac{AP}{CS} = \frac{AM}{MC}$, $\frac{AQ}{BR} = \frac{AN}{BN}$	1p
$\frac{AP}{CS} = \frac{AB}{BC}$, $\frac{AQ}{BR} = \frac{AC}{BC}$	1p
$\frac{AP}{CS} + \frac{AQ}{BR} = \frac{AB}{BC} + \frac{AC}{BC} > 1$	1p
b) $\frac{CS}{AP} = \frac{BC}{AB}$, $\frac{BR}{AQ} = \frac{BC}{AC}$	1p
$\frac{BC}{AB} + \frac{BC}{AC} > \frac{BC^2}{AB \cdot AC}$	2p
IV. Se consideră un pătrat $ABCD$ în care $AC \cap BD = \{O\}$ și punctele $E \in (BD)$, $Q \in (AC)$, $F \in (DO)$ astfel încât: $\frac{DE}{BD} = \frac{1}{8}$, $\frac{AQ}{AC} = \frac{7}{8}$ și $\frac{EF}{DO} = \frac{1}{2}$. a) Arătați că patrulaterul $ABQE$ este trapez isoscel; b) Știind că $FC \cap AE = \{H\}$ arătați că $HO < \frac{AB}{2}$	
a) Construcția figurii	1p
$EQ \parallel AB$	1p
$[AE] \equiv [BQ]$ și concluzia	1p
b) F – Centrul de greutate al triunghiului ACE	1p
H- este mijlocul lui AE	1p
$HO = \frac{EC}{2}$	1p
$EC < AB$ și finalizare	1p