Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Locală Dâmbovița - 21 Februarie 2016

CLASA A X-A

Subiectul 1. Fie $a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$ și $x = \lg a,\ y = \log_6 a,\ z = \log_{15} a$. Demonstrați că:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{\log_2 a} + \frac{1}{\log_3 a} + \frac{1-}{\log_5 a}.$$

Subiectul 2. Fie $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ astfel încât $f(f(x)) = x^2$, oricare ar fi $x \in (0, \infty)$.

a) Demonstrați că funcția f este bijectivă.

b) Arătați că: $\sqrt{f(x)} = f(\sqrt{x})$, oricare ar fi $x \in (0, \infty)$.

c) Calculați $f(1)$.

Subiectul 3. Demonstrați că, pentru orice numere reale $x, y, z \geq 1$, avem:

$$x \log_2(2^y + 2^z) + y \log_2(2^z + 2^x) + z \log_2(2^x + 2^y) \leq 2(x^2 + y^2 + z^2).$$

GM

Subiectul 4. Se consideră trei numere distincte $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ cu modulele egale și definim:

$$a = \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2},\quad b = \frac{z_2 + z_3}{z_2 - z_3},\quad c = \frac{z_3 + z_1}{z_3 - z_1}.$$

Demonstrați că, dacă $a^2 + b^2 + c^2 = -1$, atunci $a = b = c$. GM

CLASA A X-A – BAREM DE CORECTARE

SUBIECTUL 1

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\log_a 10+\log_a 6+\log_a 15$ (2 puncte)

$=\log_a 900$ (2 puncte) $=2\log_a 30$ (1 punct)

$\frac{1}{\log_2 a}+\frac{1}{\log_3 a}+\frac{1}{\log_5 a}=\log_a 2+\log_a 3+\log_a 5$

$=\log_a 30$ (2 puncte)

SUBIECTUL 2

f injectivă (2 puncte)

f surjectivă (2 puncte)

$\sqrt{f(x)}=f(\sqrt{x})$ (2 puncte)

$f(1)=1$ (1 punct)

SUBIECTUL 3

2 puncte

Soluție. Cum $y \geq 1, z \geq 1$, rezultă că $\dfrac{1}{2^y} \leq \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{2^z} \leq \dfrac{1}{2}$, deci $\dfrac{1}{2^y} + \dfrac{1}{2^z} \leq 1$.

2 puncte

Obținem $2^y + 2^z \leq 2^{y+z}$, de unde $\log_2(2^y + 2^z) \leq y + z$ și celelalte. Atunci $\sum x \log_2(2^y + 2^z) \leq \sum x(y+z) = 2\sum xy \leq 2\sum x^2$.

3 puncte

SUBIECTUL 4

Soluție. Fie $r = |z_1| = |z_2| = |z_3|$. Avem $\overline{a} = \dfrac{\overline{z_1} + \overline{z_2}}{\overline{z_1} - \overline{z_2}} = \dfrac{\dfrac{r^2}{z_1} + \dfrac{r^2}{z_2}}{\dfrac{r^2}{z_1} - \dfrac{r^2}{z_2}} = \dfrac{z_2 + z_1}{z_2 - z_1} =$

3 puncte

$= -a$, deci a, b, c sunt numere pur imaginare. Fie $x, y, z \in \mathbf{R}^*$ cu $a = \mathrm{i}x$, $b = \mathrm{i}y$ $c = \mathrm{i}z$. Atunci $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{1 + \mathrm{i}x}{-1 + \mathrm{i}x}$, $\dfrac{z_2}{z_3} = \dfrac{1 + \mathrm{i}y}{-1 + \mathrm{i}y}$, $\dfrac{z_3}{z_1} = \dfrac{1 + \mathrm{i}z}{-1 + \mathrm{i}z}$, de unde, prin înmulțire

2 puncte

obținem $(-1 + \mathrm{i}x)(-1 + \mathrm{i}y)(-1 + \mathrm{i}z) = (1 + \mathrm{i}x)(1 + \mathrm{i}y)(1 + \mathrm{i}z)$ și apoi $xy + yz + zx = 1$

Pe de altă parte, din $a^2 + b^2 + c^2 = -1$ rezultă $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, adică $\sum(x - y)^2 = 0$ și deci $x = y = z$. Atunci $a = b = c$, ceea ce trebuia demonstrat.

2 puncte