OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ- etapa locală
16 februarie 2013

clasa a VII-a

SUBIECTUL

1. Determinați numărul $\overline{ab}$ știind că $3\sqrt{\overline{ab}} = 2(a+b)$.

S: E12.404, februarie 2012

SUBIECTUL 2

2. În paralelogramul ABCD cu AB $\perp$ AC, AC $\cap BD = \{O\}$, notăm cu P simetricul punctului B față de dreapta AC și cu Q simetricul punctului P față de mijlocul segmentului [AC].
   a) Demonstrați că patrulaterul ABQD este trapez dreptunghic.
   b) Arătați că $\mathcal{A}_{ABQD} = 6\ \mathcal{A}_{OCQ}$.

SUBIECTUL 3

Dacă $a = \cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2^{n+1}}}}}}$, determinați numărul natural n, astfel încât numărul

$b = \sqrt{\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{a}}}$ să fie rațional.

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect se notează cu 0- 7 puncte
Nu se acordă puncte din oficiu
Timp efectiv de lucru 2 ore

Olimpiada Nationala de Matematica
Etapa locala- 16.02.2013
Clasa a VII-a

<u>Soluţii şi Barem de corectare:</u>

PROBLEMA 1

2(a+b) număr natural par
2p

$3\sqrt{\overline{ab}}$ număr natural par 1p

$\overline{ab}$ pătrat perfect par 1p

$\overline{ab} \in \{16,36,64\}$ 1p

$3 \mid 2(a+b)$ şi $3 \nmid 2 \Rightarrow 3 \mid (a+b)$ 1p

$\overline{ab} = 36$

PROBLEMA 3

Prin amplificare cu 2^{n+1} obţinem că $1+\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{2^{n+1}+1}{2^{n+1}}$ şi $\frac{1}{\frac{2^{n+1}+1}{2^{n+1}}}=\frac{2^{n+1}}{2^{n+1}+1}$ de unde

$a=\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1-\cfrac{2^{n+1}}{2^{n+1}+1}}}}$ 1p

Amplificând apoi cu $2^{n+1}+1$ avem $1-\frac{2^{n+1}}{2^{n+1}+1}=\frac{1}{2^{n+1}+1}$

iar $\frac{1}{\frac{1}{2^{n+1}+1}}=2^{n+1}+1$ deci $a=\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{2^{n+1}+2}}$ 1p

În final obţinem că $a=\frac{2^{n+1}+2}{2^{n+1}+1}$ 1p

Înlocuind pe a, avem că $1-\frac{1}{a}=1-\frac{2^{n+1}+1}{2^{n+1}+2}$, de unde prin amplificare cu $2^{n+1}+2$

obţinem în final că $b=\sqrt{2^{n+1}+2}$ 1p

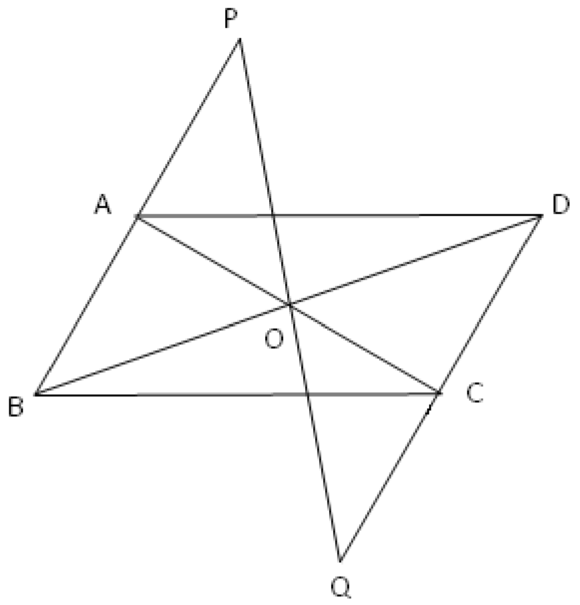
Dacă n = 0 atunci b = 2 $\in \mathbb{Q}$ 1p

Dacă $n \neq 0$ atunci $2 \mid 2^{n+1}+2$ $și$ $4 \nmid 2^{n+1}+2$ deci $b \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$ 2p

Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

Str. 1 Decembrie nr.5, Cod 420080, Bistrița, Jud. B-N
Tel: +40 (0)263 213529
Fax: +40 (0)263 216654
www.isjbn.ro

PROBLEMA 2



a)

1p

Patrulaterul APCQ este paralelogram, deci $AP \parallel CQ$ şi $[AP] \equiv [CQ]$ 1p

Punctele P, A şi B sunt coliniare și $[AP] \equiv [AB]$ de unde obţinem că AB ∥ CQ şi $[AB] \equiv [CQ]$, prin urmare ABQC paralelogram 1p

AB ∥ CQ şi AB ∥ CD deci punctele D, C şi Q sunt coliniare 1p

AB ∥ DQ, AD∦BQ (în caz contrar dreptele BQ şi BC ar fi identice în contadicţie cu coliniaritatea punctelor D,C şi Q) ⟹ABQD – trapez 1p

AC ∥ BQ şi AB ⊥ AC ⟹AB⊥ BQ de unde ABQD – trapez dreptunghic 1p

b)

Punctul C este mijlocul segmentului [QD] şi obţinem că $\mathcal{A}_{OCQ} = \mathcal{A}_{COD} = \frac{\mathcal{A}_{ACD}}{2}$ 1p

ABCD şi ABQC fiind paralelograme ⟹ $\mathcal{A}_{ABQD} = 3\,\mathcal{A}_{ACD} = 6\,\mathcal{A}_{OCQ}$ 1p

Str. 1 Decembrie nr.5, Cod 420080, Bistrița, Jud. B-N
Tel: +40 (0)263 213529
Fax: +40 (0)263 216654
www.isjbn.ro