INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN V A S L U I
TELEFON: 0235/311928
FAX: 0235/311715
e-mail: isjvaslui@isj.vs.edu.ro
website : http://isj.vs.edu.ro

MINISTERUL EDUCAȚIEI CERCETĂRII TINERETULUI ŞI SPORTULUI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – 9.02.2013- Clasa a VIII-a

1. Determinați un număr întreg care să fie soluție a ecuației

$$\frac{x^2-x+7}{9}+\frac{x^2-2x+7}{10}+\frac{x^2-3x+7}{11}+...+\frac{x^2-2013x+7}{2021}=2013$$

2. a) Dacă $a\in(0,+\infty)$ şi $b\in(0,+\infty)$ astfel încât $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b+2}$, arătați că $\frac{\sqrt{ab+1}}{a+b+1}$ este număr natural.

b) Arătați că ecuația $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{1006}}+\frac{1}{\sqrt{2012-x}+\sqrt{1006}}=\frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{2012-x}}$ are 2013 soluții în mulțimea numerelor întregi.

(G.M. nr. 9/2012)

3. În triunghiul ABC cu m($\sphericalangle A=90^0$), $[CD$ este bisectoarea $\sphericalangle ACB$, D$\in$(AB), DE $\perp$ BC, E$\in$(BC) iar P este un punct pe perpendiculara în E pe planul triunghiului. Dacă AC= 12 cm, BC= 20 cm, PE= 6 cm, aflați:

a)lungimea segmentului (PD)

b)distanța de la P la CD.

4. În vârful D al pătratului ABCD se ridică perpendiculara pe planul (ABC) pe care se ia un punct M, $MD\neq AB$. Ducem $DP\perp MA$, $DQ\perp MC$ ($P\in(MA)$, $Q\in(MC)$).

a) Arătați că PQ$\parallel$ (ABD) ;

b) Calculați $m(\angle(MB,PQ))$;

c) Demonstrați că proiecția lui D pe PQ aparține dreptei MO, unde O este centrul pătratului ABCD.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect rezolvat corect se notează cu 7 puncte.

BAREM DE NOTARE

1. Soluție: Sunt 2013 fracții. Avem

$$\left(\frac{x^2-x+7}{9}-1\right)+\left(\frac{x^2-2x+7}{10}-1\right)+\left(\frac{x^2-3x+7}{11}-1\right)+\ldots+\left(\frac{x^2-2013x+7}{2021}-1\right)=0 \text{ ....}\mathbf{(2p)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2-x-2}{9}+\frac{x^2-2x-3}{10}+\frac{x^2-3x-4}{11}+\ldots+\frac{x^2-2013x-2014}{2021}=0 \Leftrightarrow \mathbf{(2p)}$$

$$\frac{(x+1)(x-2)}{9}+\frac{(x+1)(x-3)}{10}+\frac{(x+1)(x-4)}{11}+\ldots+\frac{(x+1)(x-2014)}{2021}=0(2p) \Rightarrow x=-1 \text{ răd.}\mathbf{(1p)}$$

2.a) $\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{a+b+2} \Rightarrow ab=(a+b)(a+b+2)$ 2p

$\frac{\sqrt{ab+1}}{a+b+1}=\frac{\sqrt{(a+b)(a+b+2)+1}}{a+b+1}=$ 1p

$=\frac{\sqrt{(a+b)^2+2(a+b)+1}}{a+b+1}=$ 1p

$=\frac{\sqrt{(a+b+1)^2}}{a+b+1}=$ (1p) $=\frac{|a+b+1|}{a+b+1}=$ 1p

$=\frac{a+b+1}{a+b+1}=1\in\mathbb{N}$ deoarece $a\in(0,+\infty)$ şi $b\in(0,+\infty)\Rightarrow|a+b+1|=a+b+1$....1p

2.b) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{1006}}{x-1006}+\frac{\sqrt{2012-x}-\sqrt{1006}}{1006-x}=\frac{2(\sqrt{x}-\sqrt{2012-x})}{x-2012+x}$ 2p

$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{1006}-\sqrt{2012-x}+\sqrt{1006}}{x-1006}=\frac{2(\sqrt{x}-\sqrt{2012-x})}{2(x-1006)}$ (A). 2p

$\left.\begin{array}{l} x\geq 0 \\ 2012-x\geq 0\Rightarrow x\leq 2012 \end{array}\right\}\Rightarrow 0\leq x\leq 2012 \ si \ x\in\mathbb{Z}\Rightarrow$ . . . . .2p)

$\Rightarrow$ ecuația are 2013 soluții numere întregi........................1p

Soluție 3 : a) (CDbisectoarea$\measuredangle$C$\Rightarrow \frac{AD}{DB}=\frac{AC}{BC}(Th.bis.)\rightarrow AD=6cm, BD=10cm$ **(1p)**

D $\in$ bisectoarei (CD$\leftrightarrow$ d(D,AC)=d(D,BC)$\leftrightarrow$ d(D,AC)=DE=6 cm **(1p.)**

Avem PE$\perp$(ABC),DE $\subset$(ABC)$\rightarrow$ PE$\perp$DE$\rightarrow$ Δ PED dreptunghic în E$\Rightarrow$ PD=6$\sqrt{2}$ **(1p)**

b) Aplicam T3$\perp$: PE $\perp$(ABC)în E , fie EQ $\perp$DC în Q $\rightarrow$ PQ$\perp$CD $\rightarrow$ d(P,CD)=PQ **(1p.)**

D $\in$bis.(CD a $\measuredangle$C$\rightarrow$DE=DA=6 cm. Aplic T.Pit. in Δ BED,se obț.BE=8 cm şi in triunghiul dr. DEC$\rightarrow CD=6\sqrt{5}$ **(1p.)** }ÎnΔDEC, EQ este înălțimea corespunzătoare ipotenuzei a.î.

EQ=$\frac{ED.CE}{DC}$ $\rightarrow$CD= $\frac{12\sqrt{5}}{5}$ **(1p.)** Tr. PEQ dr. in E PQ^2= EP^2+ EQ^2$\rightarrow$PQ= $\frac{18\sqrt{5}}{5}$ **(1p.)**

Soluție 4

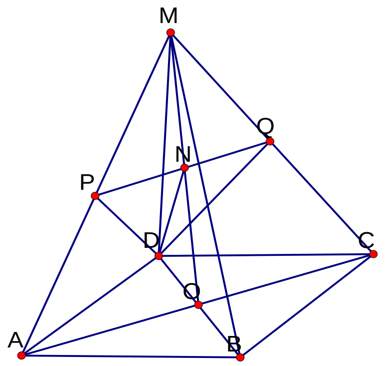

Figura---(1p)

a) Arătăm că $\left.\begin{array}{l} MA = MC \\ MP = MQ \end{array}\right\} \Rightarrow$ (1p) $\Rightarrow \dfrac{MP}{MA} = \dfrac{MQ}{MC} \Rightarrow$ (1p)

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} PQ \parallel AC \\ AC \subset (ABD) \end{array}\right\} \Rightarrow PQ \parallel (ABD)$ (1p)

b) $\left.\begin{array}{l} AC \perp BD \\ AC \perp MD \\ BD \cap MD = \{D\} \\ BD, MD \subset (MDB) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} AC \perp (MDB) \\ MB \subset (MDB) \end{array}\right\} \Rightarrow$ (1p)

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} AC \perp MB \\ AC \parallel PQ \end{array}\right\} \Rightarrow MB \perp PQ \Rightarrow m[\sphericalangle(MB, PQ)] = 90^0$ (1p)

c)

$MO, PQ \subset (MAC)$

Fie $\left.\begin{array}{l} MO \cap PQ = \{N\} \\ PQ \parallel AC \\ O \;\; mijloc \;(AC) \end{array}\right\} \Rightarrow N \;\; mijloc \;(PQ)$ (1p)

Se arată că $PD = DQ$ și cu N mijloc (PQ) $\Rightarrow DN \perp PQ$ (1p)

Orice soluție corectă se punctează cu 7 puncte.