Olimpiada de matematică
Etapa locală, 28.02.2015
Clasa a VII-a

Subiecte:

1. Fie $a = \sqrt{3} + \sqrt{3^2} + \sqrt{3^3} \dots + \sqrt{3^{2015}}$.
   a) Să se arate că $a + 3^{1008} = a\sqrt{3} + \sqrt{3}$.
   b) Să se arate că $\frac{2a}{\sqrt{3}+1} + \sqrt{3}$ este pătratul unui număr natural.

2. Să se determine $x \in \mathbb{Z}$ pentru care $2\left|x - \sqrt{5}\right| + \left|x - 2\sqrt{5}\right| \in \mathbb{N}$.

3. În triunghiul ascuțitunghic ABC, $[AD$ este bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$, $D \in (BC)$, paralela prin D la AB intersectează (AC) în E, iar paralela prin D la AC intersectează AB în F .
   Ducem $AG \perp DF$, $G \in DF$ și $AM \perp DE, M \in DE$. Dacă $\{H\} = AG \cap EF$, $\{T\} = DH \cap AB$, $\{V\} = AM \cap EF$ și $\{S\} = DV \cap AC$, să se arate că :
   a) $AT \perp DH$.
   b) $[DT] \equiv [DS]$.

4. Fie $ABCD$ un paralelogram, E este mijlocul lui $[AD]$ și F este mijlocul lui $[DC]$. Dacă $\{M\} = AF \cap BD$ și $\{N\} = BE \cap AC$, să se arate că $MN \parallel AD$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore.
La fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.

Barem clasa a VII-a

1.a) Din egalitatea $a - a\sqrt{3} = \sqrt{3} - \sqrt{3^{2016}} = \sqrt{3} - 3^{1008}$ rezultă relația cerută............$3p$

b) Relația de la a) se mai scrie $a(\sqrt{3}-1) = 3^{1008} - \sqrt{3}$. Înmulțind egalitatea cu $\sqrt{3}+1$ rezultă $2a = (3^{1008} - \sqrt{3})(\sqrt{3}+1)$, deci $\frac{2a}{\sqrt{3}+1} + \sqrt{3} = 3^{1008} = (3^{504})^2$...............................$4p$

2. Dacă $x < \sqrt{5}$ rezultă $2(\sqrt{5} - x) + 2\sqrt{5} - x = 4\sqrt{5} - 3x$, nu verifică.........................$2p$

Dacă $\sqrt{5} \le x < 2\sqrt{5}$ rezultă $2(x - \sqrt{5}) + 2\sqrt{5} - x = x$ și $x \in \mathbb{N}$. Deoarece $\sqrt{5} \le x < 2\sqrt{5}$, rezultă $x \in \{3,4\}$..$3p$

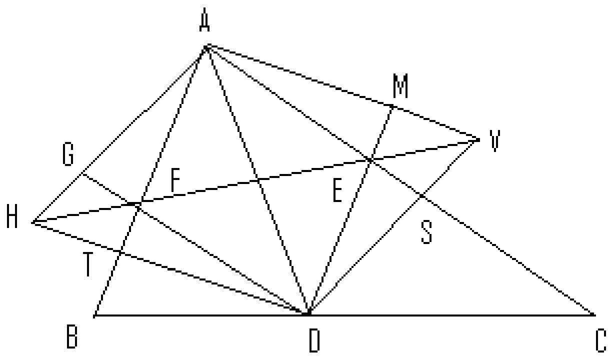
Dacă $x \ge 2\sqrt{5}$ rezultă $2(x - \sqrt{5}) + x - 2\sqrt{5} = 3x - 4\sqrt{5}$, nu verifică......................$2p$

3.a) $AFDE$ paralelogram, $[AD$ bisectoare, rezultă $AFDE$ romb și $EF \perp AD$ ....$2p$

Deci $HF \perp AD$, $DG \perp AH$ și F este ortocentrul triunghiului AHD, deci $AT \perp DH$............ $2p$

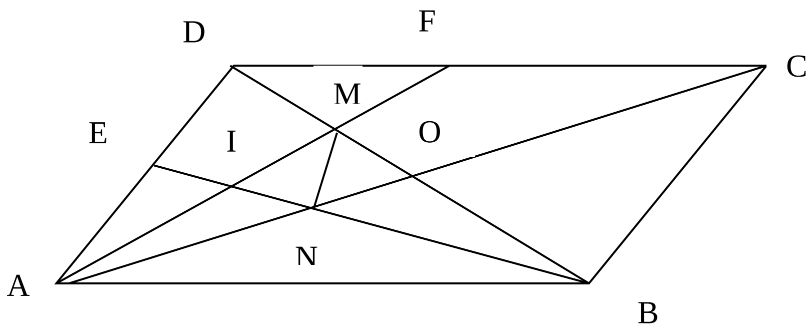
b) În mod asemănător va rezulta E ortocentrul triunghiului AVD, deci $AS \perp DV$....................$2p$

Triunghiurile dreptunghice ATD și ASD sunt congruente (ipotenuza $[AD]$ comună, $\widehat{TAD} \equiv \widehat{SAD}$) , deci $[DT] \equiv [DS]$... $1p$



4. Dacă O este intersecția diagonalelor paralelogramului, rezultă M centrul de greutate al triunghiului ADC și N centrul de greutate al triunghiului ADB....$4p$

În aceste triunghiuri, $[DO]$ și $[AO]$ sunt mediane, $\frac{OM}{MD} = \frac{ON}{NA} = \frac{1}{2}$, deci $MN \parallel AD$................$3p$



Observație.Orice soluție corectă, diferită de cea din barem, se punctează cu punctajul maxim acordat.