Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală -14.02.2015
Clasa a VI-a

Problema 1

Arătaţi că numerele *x* şi *y* sunt pătrate perfecte , dacă

$$x = \left[2^{30^2} \cdot (2^6)^{100} \cdot 2 + (64^4)^{100} : \, 2^{899}\right]^2 + 2^{3007}$$

$$y = (3^{2002} - 3^{2001} - 9^{1000}$$

Problema 2

Determinaţi cel mai mic număr natural *n* pentru care $a = 2^n + n^2$ este divizibil cu 10

Problema 3

Ana, Bogdan şi Cristina locuiesc pe aceeaşi stradă (în această ordine) . La jumătatea distanţei dintre casa Anei şi cea a lui Bogdan este o cofetărie, iar la jumătatea distanţei dintre casa Anei şi cea a Cristinei este o librărie. Ştiind că distanţa dintre cofetărie şi librărie este de 100 m , să se afle distanţa dintre casa lui Bogdan şi cea a Cristinei.

Problema 4

Fie unghiul AOB cu măsura de 135^o. În interiorul său se consideră punctul C astfel încât $m(\measuredangle AOC) = \frac{2}{3} m(\measuredangle AOB)$. Pe dreapta OB se consdera punctul E astfel ca semidreptele (OE şi (OB să fie semidrepte opuse. Demonstraţi că :

a) $\measuredangle BOC \equiv \measuredangle AOE$

b) $\measuredangle AOB \equiv \measuredangle COE$

c) Dacă (OP este bisectoarea unghiului AOC , atunci (OA este bisectoarea unghiului EOP

Notă

- Timp de lucru efectiv 2 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală -14.02.2015
Barem de notare
Clasa a VI-a

Problema 1

$x = (2^{900} \cdot 2^{600} \cdot 2 + 64^{400} : 2^{899})^2 + 2^{3007}$ 1p

$x = (2^{1501} + 2^{1501})^2 + 2^{3007}$ 1p

$x = 2^{3004}(1+2^3)$ 1p

$\Rightarrow x = (2^{1502})^2 3^2 \Rightarrow x = (2^{1502} 3)^2$ – pătrat perfect. 1p

$y = 5 [3^{2001}(3-1) - (3^2)^{1000}]$ 1p

$y = 5(3^{2001} 2 - 3^{2000}) \Rightarrow y = 5 \, 3^{2000}(3 \cdot 2 - 1)$ 1p

$y = 5 \cdot 3^{2000} \cdot 5 \Rightarrow y = (5 \cdot 3^{1000})^2$ pătratperfect.. 1p

Problema 2

$a = 2^n + n^2$, $n \in N$

Pentru $n=0 \Rightarrow a = 2^0 + 0^2 = 1$ nu divide 10

$n=1 \Rightarrow a = 2^1 + 1^2 = 3$ nu divide 10 4p

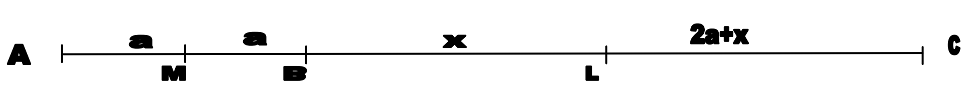
.....

$n = 6 \Rightarrow a = 2^6 + 6^2 = 100$ divide 10 2p

Cel mai mic numar natural care verifică relaţia este n=6 1p

Problema 3

Notăm cu A, B, și C casele celor trei copii, , M cofetăria și L libraria.



[AM]Ξ[MB]=>AM=MB=a 1p

BL=x 1p

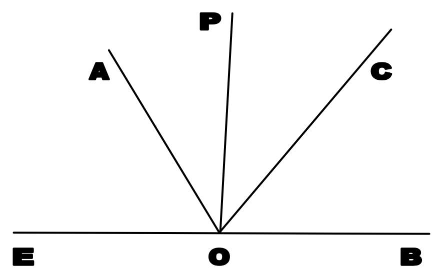
ML=a+x=100m 1p

AL=LC=2a+x 1p

BC=x+2a+x=2a+2x=2(a+x)=200m 3p

Problema 4

Figură corectă 1p



a) $m(\sphericalangle AOC) = \frac{2}{3} * m\sphericalangle AOB = \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} * \cancel{135}^{45}\,^{o}$

(OE și (OB opuse => m (< EOB) = 180^{O}

m (< AOE) = 180^{O}-m (< AOB) = 180^{o}-135^{o}= 45^{o} } => < AOE Ξ <BOC 2p

m (< BOC) =m (< AOB) –m (< AOC) = 135^{O}- 90^{O} = 45^{O}

b) m(< COE)= m (<EOA) +m (< AOC)= 45^{O}+ 90^{O}= 135^{O}=m (< AOB) =>

< AOB Ξ < COE 2p

c) (OP- bisectoarea unghiului AOC => m (<AOP)= m (<POC) = 90^{O}:2=45^{O}

} =>m (<AOP) = m (<AOE) =>

(OA-bisectoarea unghiului EOP 1p