OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 21 februarie 2016

Clasa a XI - a

SUBIECTUL I (7p)

Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_1>0$ și $a_{n+1}=a_n\sqrt{\dfrac{n}{n+a_n^4}}$, $n\geq 1$. Să se arate că șirul este convergent și să se calculeze limita sa.

Florin Rotaru, Focșani - GM. 11/2015.

SUBIECTUL II (7p)

$(2p)$ a) Să se arate că dacă funcția $F:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ este periodică și există $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=l$, atunci $l\in\boldsymbol{R}$ și F este constantă.

$(5p)$ b) Determinați funcțiile $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ care verifică condițiile:

i) există $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-x\right)=a\in\boldsymbol{R}$;

ii) $f(x+2)+f(x)=2f(x+1)$, $(\forall)x\in\boldsymbol{R}$.

SUBIECTUL III (7p)

Considerăm matricea $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 4\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\boldsymbol{R})$.

$(1p)$ a) Determinați toate matricele $B\in\mathcal{M}_2(\boldsymbol{R})$ pentru care $AB=BA$;

$(3p)$ b) Rezolvați în $\mathcal{M}_2(\boldsymbol{R})$ ecuația $X^2=A$;

$(1p)$ c) Arătați că $A^2=2\cdot 3\cdot A-3^2\cdot I_2$ și $A^3=3\cdot 3^2\cdot A-2\cdot 3^3\cdot I_2$;

$(2p)$ d) Calculați A^{2016}.

SUBIECTUL IV (7p)

$(2p)$ a) Să se demonstreze că $(\forall)A,B\in\mathcal{M}_n(\boldsymbol{R})$ cu $AB=BA$, avem $det\left(A^2+B^2\right)\geq 0$.

$(5p)$ b) Fie $A\in\mathcal{M}_n(\boldsymbol{R})$ astfel încât $A+{}^tA=O_n$. Să se arate că $(\forall)\lambda\in\boldsymbol{R}$, avem $det\left(I_n+\lambda A^2\right)\geq 0$.

NOTĂ: Timp de lucru – 3 ore

BAREM DE CORECTARE

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 21 februarie 2016

Clasa a XI - a

<u>SUBIECTUL I</u> (7p)

Fie șirul $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$ definit prin $a_1>0$ și $a_{n+1}=a_n\sqrt{\dfrac{n}{n+a_n^4}}$, $n\geq 1$. Să se arate că șirul este convergent și să se calculeze limita sa.

Florin Rotaru, Focșani - GM. 11/2015.

Prin inducție se obține $a_n>0$, $(\forall)n\geq 1$ deci șirul este mărginit inferior .... $(1p)$

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\sqrt{\dfrac{n}{n+a_n^4}}<1$, $(\forall)n\geq 1$ deci șirul este strict descrescător .... $(1p)$

Din teorema lui Weierstrass se obține convergența șirului cu limita $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=l\geq 0$ .... $(1p)$

Relația de recurență devine $a_{n+1}^2=\dfrac{na_n^2}{n+a_n^4}\Rightarrow\dfrac{1}{a_{n+1}^2}=\dfrac{n+a_n^4}{na_n^2}\Rightarrow\dfrac{1}{a_{n+1}^2}=\dfrac{1}{a_n^2}+\dfrac{a_n^2}{n}\Rightarrow\dfrac{1}{a_{n+1}^2}-\dfrac{1}{a_n^2}=\dfrac{a_n^2}{n}$ .... $(1p)$

Sumând relațiile anterioare $\Rightarrow\dfrac{1}{a_{n+1}^2}=\dfrac{1}{a_1^2}+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{a_k^2}{k}$ și cum $a_k^2>l^2\Rightarrow\dfrac{1}{a_{n+1}^2}>\dfrac{1}{a_1^2}+l^2\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$ .... $(1p)$

Dacă prin absurd $l>0$, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}=\infty$, trecând la limită în inegalitatea anterioară deducem că

$\dfrac{1}{l^2}\geq\dfrac{1}{a_1^2}+l^2\cdot\infty\Rightarrow\dfrac{1}{l^2}\geq\infty$ ceea ce este absurd .... $(1p)$

În concluzie, rămâne $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=l=0$ .... $(1p)$

<u>SUBIECTUL II</u> (7p)

$(2p)$ **a) Să se arate că dacă funcția $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ este periodică și există $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=l$, atunci $l\in\mathbf{R}$ și F este constantă.**

$(5p)$ **b) Determinați funcțiile $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ care verifică condițiile:**

i) există $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-x\right)=a\in\mathbf{R}$;

ii) $f(x+2)+f(x)=2f(x+1)$, $(\forall)x\in\mathbf{R}$.

a) Fie T o perioadă $(T>0)$ a funcției și presupunem prin absurd că $(\exists)x_1\neq x_2$ cu $F(x_1)\neq F(x_2)$.

Dacă $x_n{}'=x_1+nT\to\infty$, $F\left(x_n{}'\right)=F(x_1+nT)=F(x_1)\to F(x_1)$ iar dacă

$x_n{}''=x_2+nT\to\infty$, $F\left(x_n{}''\right)=F(x_2+nT)=F(x_2)\to F(x_2)$ deci F nu are limită la ∞, contradicție ..... $(1p)$

Așadar funcția este constantă $\left(F(x)=c\right)$ iar $l=\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=c\in\mathbf{R}$ .... $(1p)$

b) Notăm $g(x)=f(x)-x$ și condiția ii) se scrie $g(x+2)+g(x)=2g(x+1)\Leftrightarrow$

$g(x+2)-g(x+1)=g(x+1)-g(x)\Leftrightarrow h(x+1)=h(x)$, $(\forall)x\in\mathbf{R}$ unde $h(x)=g(x+1)-g(x)$ ...... $(1p)$

$\lim\limits_{x\to\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(g(x+1)-g(x)\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x+1)-(x+1)-\left(f(x)-x\right)\right]=a-a=0$ .... $(1p)$

$h(x+1)=h(x)$, $(\forall)x\in\mathbf{R} \Rightarrow h$ este periodică .... $(1p)$

Ultimele două observații, utilizând a) $\Rightarrow h$ este funcție constantă și $h(x)=0$, $(\forall)x\in\mathbf{R}$ .... $(1p)$

$\Rightarrow g(x+1)=g(x)$, $(\forall)x\in\mathbf{R} \Rightarrow g$ este periodică și $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=a \Rightarrow g$ este constantă

$g(x)=a \Rightarrow f(x)=x+a$ (care verifică ipotezele) .... $(1p)$

SUBIECTUL III (7p)

Considerăm matricea $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

$(1p)$ a) Determinați toate matricele $B\in\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ pentru care $AB=BA$;

$(3p)$ b) Rezolvați în $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ ecuația $X^2=A$;

$(1p)$ c) Arătați că $A^2=2\cdot 3\cdot A-3^2\cdot I_2$ și $A^3=3\cdot 3^2\cdot A-2\cdot 3^3\cdot I_2$;

$(2p)$ d) Calculați A^{2016}.

a) Se caută $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ și se obține $B=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a-2b \end{pmatrix}$ cu $a,b\in\mathbf{R}$ .... $(1p)$

b) $X^3=X^2\cdot X=X\cdot X^2 \Rightarrow X^2\cdot A=A\cdot X^2$, așadar X^2 comută cu A și (pct. a)) căutând matricea X de forma $X=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a-2b \end{pmatrix}$ se obține sistemul $\begin{cases} a^2-b^2=2 \\ 2b^2-2ab=1 \\ a^2-4ab+3b^2=4 \end{cases}$ .... $(1p)$

$\Rightarrow \begin{cases} a^2-b^2=2 \\ -4b^2+4ab=-2 \end{cases} \Rightarrow a^2+4ab-5b^2=0 \Rightarrow \left(\dfrac{a}{b}\right)^2+4\cdot\dfrac{a}{b}-5=0$, etc. Se obțin soluțiile $a=\pm\dfrac{5}{2\sqrt{3}}$ și

$b=\mp\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$ care verifică și ultima ecuație a sistemului $\Rightarrow X\in\left\{\begin{pmatrix} \frac{5}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{7}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{5}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{7}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix}\right\}$ ...... $(2p)$

c) verificare directă .... $(1p)$

d) se arată prin inducție că $A^n=n\cdot 3^{n-1}\cdot A-(n-1)\cdot 3^n\cdot I_2 \Rightarrow A^{2016}=2016\cdot 3^{2015}A-2015\cdot 3^{2016}I_2$ .... $(2p)$

SUBIECTUL IV (7p)

$(2p)$ a) Să se demonstreze că $(\forall)A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ cu $AB=BA$, avem $\det\left(A^2+B^2\right)\geq 0$.

$(5p)$ b) Fie $A\in\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ astfel încât $A+{}^tA=O_n$. Să se arate că $(\forall)\lambda\in\mathbf{R}$, avem $\det\left(I_n+\lambda A^2\right)\geq 0$.

a) $\det\left(A^2+B^2\right)=\det\left((A+iB)(A-iB)\right)=\det(A+iB)\det(A-iB)=\det(A+iB)\det\left(\overline{A+iB}\right)=$

$=\det(A+iB)\overline{\det(A+iB)}=\left|\det(A+iB)\right|^2\geq 0$ .... $(2p)$

b) Dacă $\lambda>0$ se utilizează a): $\det\left(I_n+\lambda A^2\right)=\det\left(I_n^2+\left(\sqrt{\lambda}A\right)^2\right)\geq 0$ (I_n și $\sqrt{\lambda}A$ comută) .... $(1p)$

Dacă $\lambda=0$ inegalitatea este evidentă .... $(1p)$

Dacă $\lambda<0$, fie $\lambda=-\alpha$, $\alpha>0$ și $\det\left(I_n+\lambda A^2\right)=\det\left(I_n-\alpha A^2\right)=\det\left(I_n-\sqrt{\alpha}A\right)\cdot\det\left(I_n+\sqrt{\alpha}A\right)$ ..... $(1p)$

$=\det\left({}^tI_n+\sqrt{\alpha}\left({}^tA\right)\right)\cdot\det\left(I_n+\sqrt{\alpha}A\right)=\det{}^t\left(I_n+\sqrt{\alpha}A\right)\cdot\det\left(I_n+\sqrt{\alpha}A\right)=\left(\det\left(I_n+\sqrt{\alpha}A\right)\right)^2\geq 0$ .... $(2p)$