1. a) $A=1-\frac{3}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{3}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{3}{6^2}+...........+\frac{1}{2011^2}-\frac{3}{2012^2}=$

$=\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+......+\frac{1}{2012^2}\right)-4\cdot\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+....+\frac{1}{2012^2}\right)=$

$=\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+......+\frac{1}{2012^2}\right)-\left(\frac{2^2}{2^2}+\frac{2^2}{4^2}+\frac{2^2}{6^2}+....+\frac{2^2}{2012^2}\right)=$

$=\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+......+\frac{1}{2012^2}\right)-\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+....+\frac{1}{1006^2}\right)=$

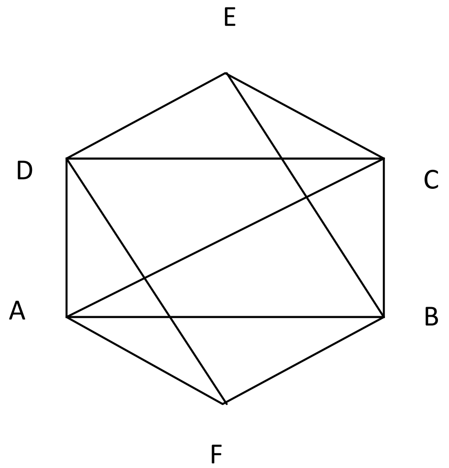
$=\frac{1}{1007^2}+\frac{1}{1008^2}+\frac{1}{1009^2}+.........+\frac{1}{2012^2}$. 4p

b) Avem $1006\cdot\frac{1}{2012^2}<A<1006\cdot\frac{1}{1007^2}$, deci $[A]=0$.

Deoarece $A<\frac{1006}{1007}\cdot\frac{1}{1007}<\frac{1}{1000}$, rezultă că primele trei zecimale sunt zerouri 3p

2. Ar trebui ca $n-1$ să fie pătrat perfect (2 p) și cum n are două cifre, $n\in\{17,26,37,50,65,82\}$ ar rezulta numerele $\sqrt{21}$, $\sqrt{31}$, $\sqrt{43}$, $\sqrt{57}$, $\sqrt{73}$, și $\sqrt{91}$. care nu sunt naturale ……………………………………………………………..5 p

3.

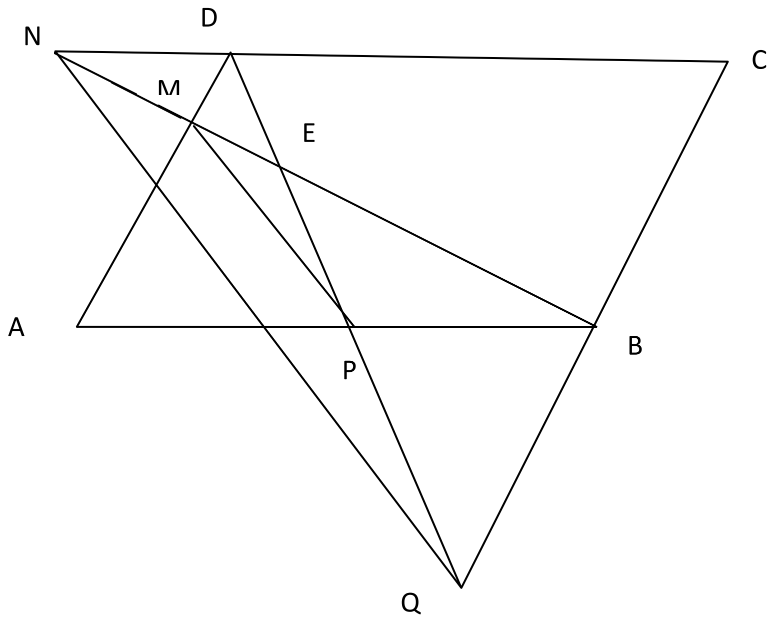


ABCD fiind dreptunghi, $\widehat{DAC}$ *și* $\widehat{ACB}$ sunt ascuțite și baza mare a trapezelor este [AC]

Deoarece $\widehat{DAC}\equiv\widehat{ECA}$ și $\widehat{DAC}\equiv\widehat{ACB}$ (alterne interne) rezultă $\widehat{ECA}\equiv\widehat{ACB}$, deci $[CA$ este bisectoarea unghiului $\widehat{ECB}$ ……………………………………….2 p

Deoarece $[EC] \equiv [CB]$ (ambele congruente cu $[AD]$) $\Rightarrow [CA$ este bisectoare în triunghiul isoscel CBE, deci $AC \perp BE$. Analog $AC \perp DF$; dar $DE \parallel AC \parallel BF$, cu proprietățile de mai sus rezultă că unghiurile patrulaterului $BEDF$ sunt drepte …5 p

4.



Deoarece $ND \parallel PB$ din Teorema lui Thales va rezulta $\frac{EP}{ED} = \frac{EB}{EN}$. Analog din $BQ \parallel DM \implies \frac{ED}{EQ} = \frac{EM}{EB}$ ………………………………………………………3 p

Înmulțind cele două egalități $\implies \frac{EP}{ED} \cdot \frac{ED}{EQ} = \frac{EB}{EN} \cdot \frac{EM}{EB}$, adică $\frac{EP}{EQ} = \frac{EM}{EN}$

Conform reciprocei teoremei lui Thales $\implies MP \parallel NQ$ ……………………..…4 p

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală, 16.02.2013
Clasa a VII-a

Subiecte:

1. Se consideră numărul rațional
$A=1-\frac{3}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{3}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{3}{6^2}+...........+\frac{1}{2011^2}-\frac{3}{2012^2}$.
   a) Să se arate că $\mathrm{A}=\frac{1}{1007^2}+\frac{1}{1008^2}+\frac{1}{1009^2}+........+\frac{1}{2012^2}$
   b) Sa se determine primele trei zecimale ale numărului A.

Mihai Bodan, Cosmești, Teleorman

2. Să se arate că dacă n este un număr natural de două cifre, numărul $\sqrt{n+\sqrt{n-1}}$ nu este natural.

3. Fie $ABCD$ un dreptunghi și punctele E *și* Fde o parte si de alta a dreptei AC astfel încât patrulaterele $ADEC$ și $AFBC$ să fie trapeze isoscele. Să se arate că patrulaterul $BEDF$ este dreptunghi.

4. Fie $ABCD$ un paralelogram, E un punct în interiorul său astfel încât $E \notin (AC)$ *și* $E \notin (BD)$. Dacă $EB \cap AD = \{M\}$, $EB \cap CD = \{N\}$, $ED \cap AB = \{P\}$, $ED \cap BC = \{Q\}$, să se arate că $MP \| NQ$

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore. Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.