Barem de notare – clasa a X-a

Problema 1. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale:

a) $4^x \cdot 9^{\frac{1}{x}} + 9^x \cdot 4^{\frac{1}{x}} + 6^{x+\frac{1}{x}} = 108$

b) $13 \cdot \left(3^{\lg x^2} + x^{\lg 4}\right) \le \left(3 \cdot x^{\lg 3} + 2^{1+\lg x}\right)^2$

Soluţie:

a) Condiţie de existenţă: $x \neq 0$

Pentru $x < 0$, membrul stâng este mai mic decât 3. ………………………………….**1p**

Dacă $x > 0$, membrul stâng se scrie $6^{x+\frac{1}{x}} \cdot \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{x-\frac{1}{x}} + \left(\frac{3}{2}\right)^{x-\frac{1}{x}} + 1\right]$.

Dar $x + \frac{1}{x} \ge 2 \Rightarrow 6^{x+\frac{1}{x}} \ge 36$.

Cum $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-\frac{1}{x}} + \left(\frac{3}{2}\right)^{x-\frac{1}{x}} \ge 2$, deducem că membrul stâng este mai mare sau egal cu 108.**(2p)**

Egalitatea se obţine pentru $x = 1$. **1p**

b) $\left(3 \cdot x^{\lg 3} + 2^{1+\lg x}\right)^2 = \left(3 \cdot 3^{\lg x} + 2 \cdot 2^{\lg x}\right)^2 \le 13 \cdot \left(3^{2\lg x} + 2^{2\lg x}\right)$ conform C.B.S ………..**1p**

Dar $3^{2\lg x} + 2^{2\lg x} = 3^{\lg x^2} + x^{\lg 4}$.

Rezultă condiţia $\frac{3}{3^{\lg x}} = \frac{2}{2^{\lg x}} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{\lg x} = \frac{3}{2}$. **1,5p**

Deci $x = 10$. ……………………………………………………………………….**0,5p**

Problema 2. Se consideră mulţimea A şi funcţia $f : A \to A$. Ştiind că $|A| = 2015$ şi $f \circ f \circ f = 1_A$, demonstraţi că $\{x \in A | f(x) = x\}$ are cel puţin două elemente.

Soluţie:

Din $f \circ f \circ f = 1_A$ rezultă că f este bijectivă. ……………………………………………………**1p**

Presupunând că f nu are niciun punct fix, rezultă $f(x) \neq x, \forall x \in A$, apoi $f(f(x)) \neq f(x)$ şi în final că $x, f(x), f(f(x))$ sunt distincte două câte două, Rezultă că A se poate scrie ca o reuniune finită de triplete de această formă, deci $|A|$ este multiplu de 3. Contradicţie! …….**3p**

Dacă presupunem că f are un singur punct fix x_0, rezultă analog că $|A - \{x_0\}|$ este multiplu de 3.Contradicţie! ………………………………………………………………………..**2p**

Deci f are cel puţin două puncte fixe. ……………………………………………………..**1p**

Problema 3. Fie a,b,c $\in \mathbb{C}^*$ astfel încât $|b|^2 = 3|a| \cdot |c|$ iar *arg a, arg b, arg c* sunt în progresie aritmetică. Dacă z_1 şi z_2 sunt rădăcinile ecuaţiei $az^2 + bz + c = 0$, demonstraţi că punctele $M_1(z_1), M_2(z_2)$ şi O (originea axelor de coordonate), sunt vârfurile unui triunghi echilateral.

Soluţie:

Considerăm: $a = R(\cos\alpha + i\sin\alpha), c = r(\cos\beta + i\sin\beta), b = \sqrt{3Rr}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + i\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

unde $r, R > 0$ şi $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$. ……………………………………………………………………**1p**

Se obţine $\Delta = -Rr[\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)] = \left(\sqrt{Rr}\right)^2 i^2 \left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + i\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2$

şi $z_{1,2} = -\sqrt{\frac{r}{R}} \cdot \frac{-\sqrt{3} \pm i}{2} \cdot \left(\cos\frac{\beta-\alpha}{2} + i\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\right)$ ……………………………………………**3p**

Atunci $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\frac{-\sqrt{3}-i}{2}}{\frac{-\sqrt{3}+i}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ ……………………………………………………………**1p**

Deci $z_1 = z_2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ sau $z_1 - 0 = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \cdot (z_2 - 0)$, adică $M_1(z_1), M_2(z_2)$ şi $O(0)$ sunt vârfurile unui triunghi echilateral. ……………………………………………**2p**

Problema 4. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale

$$\sqrt[3]{x\sqrt{x}}-\sqrt[7]{x\sqrt{x\sqrt{x}}}=6\sqrt[12]{x\sqrt{x}}\ .$$

Gazeta matematică

Soluţie:

Condiţia de existenţă a radicalului: $x \geq 0$

Ecuaţia se scrie: $x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{4}}=6x^{\frac{1}{8}}$. Notăm $x=t^8$ ……………………………………………………**3p**

Obţinem ecuaţia: $t^4-t^2-6t=0 \Rightarrow t\left(t^3-t-6\right)=0 \Rightarrow t_1=0$ …………………………………**1p**

Sau $t^3-t-6=0 \Rightarrow t^3-4t+3t-6=0 \Rightarrow t\left(t^2-4\right)+3\left(t-2\right)=0$ ……………………………..**1p**

Rezultă $\left(t-2\right)\cdot\left(t^2+2t+3\right)=0 \Rightarrow t_2=2$ ……………………………………………………**0,5p**

Sau $t^2+2t+3=0 \Rightarrow \Delta_t=-8<0 \Rightarrow$ ecuaţia nu are soluţii reale. ……………………………**0,5p**

Obţinem $x \in \{0;256\}$ ……………………………………………………………………..**1p.**