

**Olimpiada de matematică**  
**Etapa locală 16.02. 2013**  
**Barem de notare clasa a VIII-a**

<b>Soluție problema 1</b>	
a) $x^2 =  x ^2$	1p
Rezultă $x^2 + 8 - 4\sqrt{2} x  = ( x  - 2\sqrt{2})^2 \geq 0$	1p
b) Deoarece $a^2 =  a ^2$ și $b^2 =  b ^2$ inegalitatea din enunț se scrie $( a  - 4)^2 + ( b  - 2\sqrt{2})^2 \leq 0$	2p
Cum termenii din membrul stâng sunt nenegativi, singura posibilitate este ca $ a  - 4 = 0$ și $ b  - 2\sqrt{2} = 0$	1p
$ a  = 4 \Rightarrow a = \pm 4$ și $ b  = 2\sqrt{2} \Rightarrow b = \pm 2\sqrt{2}$	1p
$(a, b) \in \{(4, 2\sqrt{2}), (4, -2\sqrt{2}), (-4, 2\sqrt{2}), (-4, -2\sqrt{2})\}$	1p
<b>Total punctaj problema 1</b>	<b>7 p</b>
<b>Soluție problema 2</b>	
a) $a_2 = a_1(1 - \sqrt{a_1}) \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right) \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow a_2 = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$	1p
b) Dacă $a_1 = \frac{1}{2}$ , rezultă $0 < a_1 < 1$ . Apoi $0 < a_1 < 1 \Rightarrow 0 < 1 - \sqrt{a_1} < 1 \Rightarrow 0 < a_1(1 - \sqrt{a_1}) < 1$ , deci $0 < a_2 < 1$	1p
Din aproape în aproape rezultă $0 < a_3 < 1, 0 < a_4 < 1, \dots, 0 < a_{10} < 1$ , adică dacă $x \in M$ , atunci $0 < x < 1$	1p
c) Fie un elemnt $a_k$ din mulțimea $M$ . Atunci $a_{k+1} = a_k(1 - \sqrt{a_k})$ , pentru oricare $k \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$	1p
Rezultă $a_{k+1} = \frac{a_k(1 - a_k)}{1 + \sqrt{a_k}}$ , de unde $a_{k+1}(1 + \sqrt{a_k}) = a_k(1 - a_k)$	1p
Rezultă $a_k^2 = a_k - a_{k+1} - a_{k+1}\sqrt{a_k} < a_k - a_{k+1} \Rightarrow a_k^2 < a_k - a_{k+1}$ , deci:	1p
$\left. \begin{array}{l} a_1^2 < a_1 - a_2 \\ a_2^2 < a_2 - a_3 \\ \dots \\ a_9^2 < a_9 - a_{10} \end{array} \right\} \Rightarrow a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_9^2 < a_1 - a_{10} < a_1$ , de unde concluzia.	1p
<b>Total punctaj problema 2</b>	<b>7 p</b>

<b>Soluție problema 3</b>		
	În figura alăturată $AD \perp \alpha$ și $M$ mijlocul ipotenuzei $BC$ Rezultă $\sphericalangle((ABC), \alpha) = \sphericalangle AMD$	1p
	Considerând $AB = a$ obținem $BC = a\sqrt{2}$ , de unde $BM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$	1p
	În $\triangle AMB$ , dreptunghic în $M$ , $\sphericalangle ABM = 45^\circ$ , de unde $AM = BM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$	1p
	În $\triangle AMD$ , dreptunghic în $D$ , $\sphericalangle AMD = 45^\circ$ , de unde $AD = DM = \frac{a}{2}$	1p
	În $\triangle ADC$ , dreptunghic în $D$ , $AC = a$ și $AD = \frac{a}{2}$ , ceea ce implică $\sphericalangle ACD = 30^\circ$ ,	1p
	relație echivalentă cu $\sphericalangle(AC, \alpha) = 30^\circ$	1p
	Congruența $\triangle ADC \equiv \triangle ADB$ asigură $\sphericalangle(AC, \alpha) = \sphericalangle(AB, \alpha) = 30^\circ$	1p
Total punctaj problema 3		<b>7 p</b>
<b>Soluție problema 4</b>		
Reprezentarea unui cub prin desen.		1p
Considerând mijloacele laturilor cubului obținem 8 cuburi cu latura de lungime 1.		1p
Atunci din cele 9 puncte cel puțin două se află în interiorul sau pe suprafața unui cub cu latura de lungime 1.		2p
Distanța maximă dintre două puncte situate în interiorul sau pe suprafața unui cub este egală cu lungimea diagonalei cubului.		1p
Diagonala unui cub cu latura de lungime 1 are lungimea $\sqrt{3}$ , ceea ce demonstrează cerința.		2p
Total punctaj problema 4		<b>7 p</b>

**Olimpiada de matematică**  
**Etapa locală 16.02. 2013**  
**Subiect clasa a VIII- a**

**Problema 1:**

- a) Dacă  $x$  este un număr real, arătați că  $x^2 + 8 - 4\sqrt{2}|x| \geq 0$ .
- b) Determinați numerele reale  $a$  și  $b$  care verifică relația  $a^2 + b^2 + 24 \leq 8|a| + 4\sqrt{2}|b|$ .

**Problema 2:**

Se consideră mulțimea de numere reale  $M = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}\}$ , unde

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = a_1(1 - \sqrt{a_1}), a_3 = a_2(1 - \sqrt{a_2}), \dots, a_{10} = a_9(1 - \sqrt{a_9}).$$

Demonstrați că:

- a)  $a_2 = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$ ;
- b) dacă  $x \in M$ , atunci  $0 < x < 1$ ;
- c)  $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_9^2 < \frac{1}{2}$ .

**Problema 3:**

Fie un triunghi dreptunghic isoscel a cărui ipotenuză este conținută într-un plan  $\alpha$  ce formează cu planul triunghiului un unghi cu măsura de  $45^\circ$ . Determinați măsura unghiurilor formate de catetele triunghiului cu planul  $\alpha$ .

**Problema 4:**

Se consideră 9 puncte situate în interiorul sau pe suprafața unui cub cu latura de lungime 2 dm. Arătați că, pentru orice alegere a acestor puncte, există două situate la o distanță mai mică sau egală cu  $\sqrt{3}$  dm.

*Timp de lucru 3 ore. Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*